



Escuela Superior
de Ingeniería

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL

Estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Autor:

TRINQUETE RODRÍGUEZ, JUAN JOSÉ

Cádiz, julio de 2017



Escuela Superior
de Ingeniería

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL

Estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Director:

TENDERO VENTANAS, JUAN ÁNGEL

Autor:

TRINQUETE RODRÍGUEZ, JUAN JOSÉ

Cádiz, julio de 2017

Índice

1. Resumen	1
2. Introducción	2
3. Marco teórico	5
3.1. Concepto de inestabilidad	5
3.2. Estudio teórico de las inestabilidades	7
3.2.1. Caso de dos fluidos con densidades distintas	10
4. Descripción de las simulaciones realizadas	12
4.1. Simulación con un único fluido	12
4.2. Simulación con dos fluidos	14
5. Análisis dimensional	18
5.1. Un único fluido	18
5.2. Dos fluidos	19
5.3. Variables propias de la simulación	20
6. Comparación icoFoam vs interFoam	22
7. Estudio de convergencia	24
7.1. Simulaciones con un único fluido	25
7.2. Simulaciones con dos fluidos	27
8. Explicación del fenómeno	30
8.1. Un único fluido	30
8.2. Dos fluidos	38
9. Estudio influencia del número de Reynolds	40
9.1. Un único fluido	40
9.2. Dos fluidos	43
10. Estudio influencia de la gravedad	46
10.1. Un único fluido	46
10.2. Dos fluidos	46

11.Estudio influencia relación de densidades	49
12.Estudio influencia de la tensión superficial	53
13.Simulaciones con distintas velocidades	56
13.1. Variación del módulo de las velocidades	56
13.2. Simulación con flujos en la misma dirección	57
14.Comparación con experimento	60
15.Conclusiones	65
Referencias	67

Índice de figuras

1.	Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en las nubes [9]	3
2.	Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en Júpiter [10]	3
3.	Esquema inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en cámara de combustión [11]	4
4.	Tipos de sistemas según la reacción ante una inestabilidad [12]	5
5.	Perturbación ante un sistema estable y ante otro marginalmente estable	6
6.	Sistema con distintos estados de equilibrio [14]	6
7.	Estado inicial del sistema que se va a estudiar.	12
8.	Valores iniciales de la variable α	15
9.	Velocidad vertical en el instante 5 para un $Re = 1 \cdot 10^5$. IcoFoam	22
10.	Velocidad vertical en el instante 5 para un $Re = 1 \cdot 10^5$. InterFoam	23
11.	Componente “z” de la vorticidad cuando aparecen los vórtices iniciales	23
12.	Forma de la malla	25
13.	Primeros vórtices para cada una de las mallas con $Re = 1 \cdot 10^5$	26
14.	Primeros vórtices para las mallas 3 y 4 con $Re = 1 \cdot 10^6$	27
15.	Perturbaciones iniciales de la vorticidad en la línea central	29
16.	Velocidad vertical en la línea central en el segundo 0.01	32
17.	Velocidad vertical en la línea central en el segundo 1.1	32
18.	Fases del desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz [21]	33
19.	Perturbación inicial de la vorticidad a lo largo de la línea central	34
20.	Componente “z” de la vorticidad en la línea central en el segundo 2.2	34
21.	Variable alfa en la línea central en el segundo 2.2	35
22.	Variable alfa en la línea central en el segundo 2.38	35
23.	Componente “z” de la vorticidad en el instante 267	36
24.	Velocidad en valor absoluto en el instante 267	36
25.	Capturas de las uniones entre vórtices	37
26.	Velocidad horizontal en regiones cercanas a la línea central	39
27.	Variable α en el segundo 3.5	39
28.	Tamaño de los vórtices iniciales	42
29.	Velocidad horizontal en el instante 2 a $Re = 5 \cdot 10^3$	43
30.	Velocidad horizontal el instante 150 en la zona central	45
31.	Variable α en el instante en el que se forman los vórtices iniciales	47

32.	Campo de vorticidad en el instante 450	47
33.	Campo de vorticidad en el instante 450	48
34.	Velocidad horizontal el instante 5 en la zona central	51
35.	Variable α en función de la posición “x” en la línea central, instante 700	54
36.	Velocidad vertical en el instante 700	54
37.	Velocidad vertical vórtices iniciales simulación con $1/We = 0$	55
38.	Vórtices iniciales	57
39.	Vórtices iniciales	58
40.	Variable α en el instante 480	59
41.	Variable α en el instante 530	59
42.	Condiciones iniciales del experimento de Thorpe [24]	61
43.	Inclinación del tubo correspondiente al experimento de Thorpe [24]	61
44.	Variable α en $t = 2,8$ en la línea central de los 0.6 metros centrales	63
45.	Interfase en los 0.6 metros centrales. Simulación de Strubelj[23]	64
46.	Interfase en los 0.6 metros centrales. Simulación realizada en este trabajo.	64

Índice de cuadros

1.	Estudio de convergencia de la simulación con $Re = 1 \cdot 10^5$	25
2.	Estudio de convergencia simulación con $Re_1 = 5 \cdot 10^4$ y $Re_2 = 1 \cdot 10^5$.	28
3.	Resultados para distintos números de Reynolds con un solo fluido . .	40
4.	Resultados para distintos números de Reynolds con dos fluidos	44
5.	Resultados para distintos π_ρ siendo el fluido más denso el de menor Re	49
6.	Resultados para distintos π_ρ siendo el fluido más denso el de mayor Re	50
7.	Comparación de los resultados del experimento de Thorpe	62

1. Resumen

El presente trabajo de fin de grado se centra en el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Al comienzo del trabajo se ha realizado un análisis dimensional para conocer los distintos números adimensionales que entran en juego cuando esta inestabilidad tiene lugar en un fluido o entre dos distintos. Una vez realizado este análisis se han llevado a cabo diferentes simulaciones numéricas con el software OpenFOAM, buscando conocer la influencia de cada uno de los números adimensionales (y consecuentemente de los parámetros que aparecen en éstos) sobre la aparición y desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. De esta forma se ha comprobado que cuando solo entra en juego un fluido el único parámetro que afecta a la aparición y posterior desarrollo de la inestabilidad es el número de Reynolds, de forma que cuanto mayor sea más inestable va a ser el sistema y menor va a ser la longitud de onda de las perturbaciones iniciales necesaria para desarrollar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Por otra parte, se ha comprobado que cuando entran en juego dos fluidos distintos tanto la gravedad como la tensión superficial se oponen al desarrollo de la inestabilidad, impidiendo o retrasando la aparición de las “espirales” típicas de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Además se verificó que el aumento de la tensión superficial y el de la diferencia de densidades retrasa la aparición de la inestabilidad, necesitándose mayores longitudes de onda en la perturbación inicial para que se desarrolle la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Tras llevar a cabo todos estos estudios se aplicó el modelo a un caso real, simulando un experimento realizado en el año 1969. En esta simulación se obtuvieron unos resultados bastante satisfactorios pues por ejemplo la longitud media de onda de la perturbación inicial obtenida coincide exactamente con el centro del rango de longitudes medidas en dicho experimento. Además también se compararon los resultados obtenidos al simular este experimento con otra simulación llevada a cabo en 2007 comprobando que el desarrollo de la inestabilidad es muy similar.

2. Introducción

La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es un fenómeno que se produce cuando entran en contacto dos flujos paralelos con diferentes velocidades (diferencias en dirección o módulo). Para que aparezca dicha inestabilidad es necesario además que exista una perturbación inicial capaz de desarrollarla, al igual que sucede en cualquier otra inestabilidad. No obstante en la naturaleza siempre aparece algún tipo de perturbación puesto que el estado ideal no existe.

Los primeros estudios que se conocen sobre esta inestabilidad fueron llevados a cabo por Helmholtz [1] en el año 1868. Cuatro años después (1871) Kelvin publicó un nuevo estudio teórico sobre esta inestabilidad [2], algunos de los resultados a los que llegó en este estudio se mostrarán en el apartado 3.2.

Desde entonces numerosos trabajos se han llevado a cabo. Algunos de ellos fueron estudios analíticos en los que se realizó una linealización del problema, como el llevado a cabo por Taylor [3] en 1931 o el realizado por Miles [4] en 1963. Sin embargo también se han realizados estudios sobre el problema sin linealizar como el llevado a cabo por Thorpe [5] en el año 1969. Dicho estudio fue efectuado de manera experimental en un laboratorio. En este trabajo se va a realizar una simulación en la que se reproduce este experimento para poder comprobar si el modelo usado en este trabajo obtiene unos resultados similares y de esta forma validar el resto de simulaciones que se van a llevar a cabo (los resultados de esta validación se muestran en el apartado 14).

Por otra parte también se han realizado diversos estudios numéricos. La mayoría de ellos se centran en la inestabilidad existente entre dos fluidos (en los siguientes párrafos se comentarán los resultados de algunos de ellos) aunque también existen algunos estudios en los que se analiza la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz cuando hay más de una interfase (más de dos fluidos) como en el estudio realizado por Lee y Kim [6] en 2015 .

Rangel y Sirignano [7] llevaron a cabo un estudio numérico en el que se centraron en el efecto de la tensión superficial y de la diferencia de densidades entre dos fluidos (una interfase) despreciando el efecto de la gravedad. Con dicho estudio demostraron que aumentando la tensión superficial o la diferencia de densidades se ralentiza el desarrollo de la inestabilidad, o dicho de otra forma, demostraron que estos parámetros tienen un efecto estabilizador sobre la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Por otra parte Fakhari y Lee [8] analizaron el efecto del número de Reynolds y de la tensión superficial a altos números de Reynolds. Observaron que la tensión superficial tiene un efecto estabilizador (esto corrobora los resultados del estudio realizado por Rangel y Sirignano [7]) mientras que el número de Reynolds tiene un efecto desestabilizador puesto que al aumentarlo el desarrollo de la inestabilidad se produce de una manera más rápida y caótica.

Hay que resaltar que las condiciones necesarias para que se desarrolle la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se dan con frecuencia, motivo por el cuál es bastante común observar este fenómeno en la naturaleza. Siendo por ejemplo la principal

causa de las olas del mar, donde entran en contacto el aire y el agua a diferentes velocidades, o de las “olas” que en ocasiones se pueden apreciar en las nubes (diferencia de velocidades entre el aire y las nubes) y que se muestran en la figura 1.



Figura 1: Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en las nubes [9]

Esta inestabilidad también se aprecia a mayores escalas en los anillos de Saturno o en los alrededores de la Gran Mancha Roja de Júpiter, tal y como se puede observar en la figura 2.



Figura 2: Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en Júpiter [10]

En la figura 2 los gases que se encuentra alrededor de la Gran Mancha Roja (vórtice anticiclónico) forman diferentes regiones en las que aparecen unas diferencias de velocidad que provoca la aparición de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. En dicha figura se pueden observar 3 zonas distintas donde aparece esta inestabilidad.

Por otra parte, este fenómeno también está presente en multitud de procesos industriales. Una de los casos más llamativos tiene lugar en las cámaras de combustión de los motores donde entran en contacto los gases provocados por la combustión con el combustible inyectado, como se puede observar en la figura 3.

En aplicaciones como esta última la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz adquiere un papel fundamental pues de su desarrollo depende que los fluidos se mezclen en mayor o en menor medida, con las consecuencias que esto pueda conllevar.



Figura 3: Esquema inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en cámara de combustión [11]

La importancia de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz tanto en aplicaciones industriales como en fenómenos naturales, tal y como se ha comentado en este apartado, justifica el estudio minucioso de la misma que se ha realizado en este trabajo, siendo de gran interés la influencia que los distintos parámetros analizados tienen en su aparición y desarrollo.

3. Marco teórico

Antes de comenzar con el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es necesario dejar claro el concepto de inestabilidad y como se estudian teóricamente.

3.1. Concepto de inestabilidad

Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido (o de cualquier partícula en general) dependen de una serie de variables entre las cuales se encuentra el tiempo. Si estas ecuaciones se resuelven para el tiempo se puede llegar a una solución estacionaria, es decir, un estado en el cual ninguna de las variables depende del tiempo. Partiendo de este estado, lo que se busca con el estudio de las inestabilidades es analizar como reacciona el sistema ante la introducción de una perturbación. Existen tres posibles reacciones ante una inestabilidad:

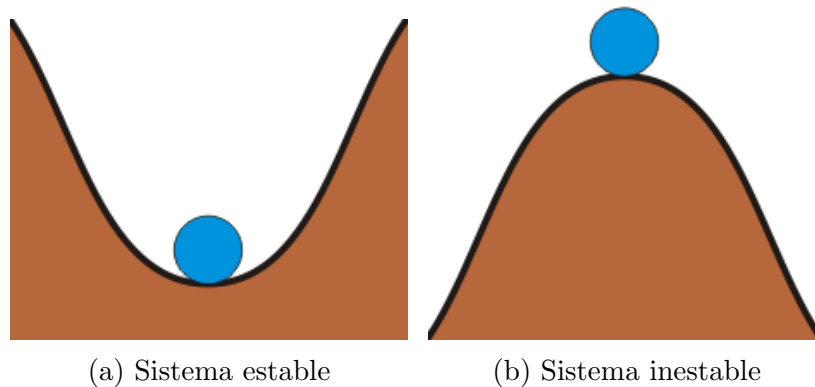


Figura 4: Tipos de sistemas según la reacción ante una inestabilidad [12]

1. **Sistema estable:** el sistema hace que la inestabilidad vaya disminuyendo poco a poco y finalmente se regresa a la solución estacionaria de la que se partió. Un ejemplo muy sencillo de este tipo de sistemas es la bola que se observa en la figura 4a, donde ante cualquier perturbación la bola volverá a su estado inicial. En este caso concreto, el rozamiento de la bola con el aire y con la superficie tienen un papel fundamental pues es el que consigue que la bola finalmente se frene, o dicho de otra forma, es el que consigue amortiguar la perturbación.
2. **Sistema inestable:** el sistema hace que la inestabilidad crezca y con el paso del tiempo el estado de este se aleja del inicial. En este tipo de sistemas estaría incluido el de la figura 4b, donde ante cualquier perturbación la bola se alejará de manera indefinida de su estado inicial.
3. **Sistema marginalmente estable:** el sistema no provoca ni una atenuación ni una amplificación de la perturbación, es decir, no tiene ningún efecto sobre ésta. Un ejemplo de este tipo de sistemas sería precisamente el sistema 4a pero en ausencia de rozamiento. En tal caso la bola oscilaría de manera permanente sobre la posición inicial pero nunca llegaría a frenarse, es decir, las oscilaciones sobre esta posición serían permanentes en vez de amortiguadas.

Para dejar aún más clara la diferencia entre el sistema estable y el marginalmente estable se va a usar la figura 5. Para que las reacciones mostradas en esta figura se correspondiesen a los sistemas previamente descritos el eje “y” sería la distancia de la bola a la posición inicial (amplitud de la perturbación) y el eje “x” el tiempo. La gráfica azul correspondería al comportamiento de la bola en presencia de rozamiento (sistema estable) y la roja al comportamiento de la bola en ausencia de éste (sistema marginalmente estable). Hay que tener en cuenta que el rozamiento hace que la bola pierda energía cinética a medida que oscila en torno a la posición inicial (valor cero del eje “y”) de forma que cada vez las oscilaciones son más pequeñas hasta que pasado un tiempo la bola llegaría a frenarse en la posición en la que estaba antes de que apareciese la perturbación.

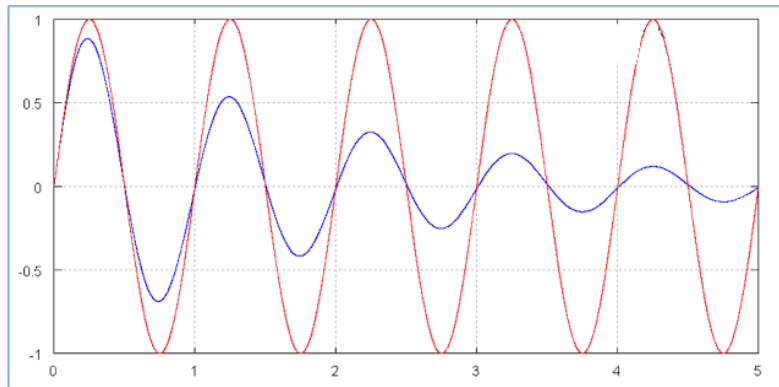


Figura 5: Perturbación ante un sistema estable y ante otro marginalmente estable

Los tres tipos de sistema que se han explicado previamente son los básicos pero la mayoría de sistemas realmente son una combinación de éstos. Es decir, normalmente el comportamiento del sistema depende de la perturbación que se le introduzca a éste. Por ejemplo un sistema puede ser estable ante pequeñas perturbaciones e inestable para perturbaciones con una mayor amplitud.

Por otra parte, hay que aclarar que no todos los sistemas estables vuelven al estado de equilibrio inicial. Es decir, en algunos casos los sistemas se estabilizan en torno a un estado de equilibrio distinto al inicial. En la figura 6 se muestra un ejemplo en el que existen dos posibles casos de equilibrio. En este ejemplo para pequeñas perturbaciones la bola volvería a la posición inicial (estado I) pero si se le introduce una perturbación lo suficientemente intensa la bola podría llegar al estado II y estabilizarse en él.



Figura 6: Sistema con distintos estados de equilibrio [14]

3.2. Estudio teórico de las inestabilidades

El procedimiento general que se sigue para estudiar las inestabilidades de manera teórica siempre suele ser el mismo (tal y como se comenta en el libro de Chandrasekhar [15]) y será descrito en este capítulo.

Este procedimiento se inicia partiendo de las ecuaciones que describen el movimiento del fluido en cuestión para un caso estacionario. De esta forma la solución del problema (a la que se le llamará \vec{Q}) va a depender de una serie de variables (a cuyo conjunto se le va a llamar \vec{x}) entre las cuáles no se encuentra el tiempo.

$$\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{x}) \quad (1)$$

A continuación se introduce una perturbación en las ecuaciones generales del fluido en cuestión, es decir, se supone que las distintas variables que intervienen en el problema sufren un pequeño (infinitesimal) incremento. Obviamente esta perturbación va a depender del tiempo como ya hemos visto en el subcapítulo anterior. De forma que ahora la solución del problema va a estar compuesta por una solución estacionaria y por otra no estacionaria (se llamará q').

$$\vec{q}(\vec{x}, t) = \vec{Q}(\vec{x}) + \varepsilon \vec{q}'(\vec{x}, t) \quad (2)$$

Como ya se ha dicho anteriormente, la perturbación es infinitesimal y por lo tanto su efecto sobre la solución estacionaria es muy pequeño (al menos inicialmente). Matemáticamente esto se cumple porque $\varepsilon \ll 1$.

Una vez que se desarrolle matemáticamente la ecuación anterior habrá sumandos en los que no aparezca ε y otros en los que sí. Los sumandos en los que no aparezca ε no dependen del tiempo y la suma de todos ellos es la solución de la ecuación estacionaria, por lo tanto se pueden eliminar pues está garantizado que cumplen la ecuación.

Lo siguiente que se debe hacer es linealizar las ecuaciones, es decir, despreciar cualquier producto o potencia (siempre y cuando no sea una potencia de exponente 1) de los incrementos que se han introducido. Para hacer esto simplemente hay que buscar los términos en los que aparezcan potencias de ε y eliminarlos. Tras hacer esto ya se tendrían las ecuaciones de las variables perturbadas.

El siguiente paso sería estudiar la reacción del sistema ante todos los posibles incrementos de las distintas variables, para ver si el sistema es estable o inestable ante ellos. Esto obviamente es inviable de hacer, así que se opta por hacer un análisis modal temporal y para ello se escribe la perturbación haciendo un desarrollo en serie de Fourier de su parte temporal. De esta forma las perturbaciones tendrían la siguiente forma:

$$\vec{q}'(\vec{x}, t) = \hat{q}(\vec{x}) e^{\omega_k t} \quad (3)$$

El hecho de que aquí se use un análisis modal temporal no implica que este sea el único método para estudiar las ecuaciones de las variables perturbadas. En su lugar

se podría usar un análisis espacial, sin embargo no se realiza en este trabajo porque se sale de los objetivos establecidos.

Usando perturbaciones de la forma que aparece en la ecuación (3) se logra separar la dependencia del tiempo de la del resto de variables. Además se consigue que las derivadas respecto al tiempo que aparezcan sean muy fáciles de calcular pues simplemente hay que multiplicar por ω_k .

La letra k en la ecuación (3) hace referencia a los distintos modos de perturbación (realmente k es el número de onda de cada uno de estos modos) y está como subíndice de ω porque ésta depende de los distintos modos de perturbación.

Es importante resaltar que ω_k suele ser de naturaleza compleja, es decir:

$$\omega_k = \omega_{k,r} + i\omega_{k,i} \quad (4)$$

Introduciendo las componentes de ω_k en la ecuación (3) y realizando un desarrollo muy sencillo se obtiene:

$$\vec{q}'(\vec{x}, t) = \hat{q}(\vec{x})[e^{\omega_{k,r}t} e^{i\omega_{k,i}t}] \quad (5)$$

Y aplicando la fórmula de Euler se obtiene:

$$\vec{q}'(\vec{x}, t) = \hat{q}(\vec{x})[e^{\omega_{k,r}t} (\cos(\omega_{k,i}t) + i \sen(\omega_{k,i}t))] \quad (6)$$

Con un simple análisis de esta última ecuación se puede llegar a la conclusión de que cuando $\omega_{k,r}$ es negativa la parte temporal de $\vec{q}'(\vec{x}, t)$ tiende a cero a medida que aumenta t mientras que cuando $\omega_{k,r}$ es positiva tiende a infinito. Es decir, $\omega_{k,r}$ es la tasa de amplificación o de amortiguamiento de la perturbación. Por otra parte el valor de $\omega_{k,i}$ es la frecuencia de la perturbación, de forma que cuando $\omega_{k,i} = 0$ la respuesta del sistema ante la perturbación no sera oscilatoria.

Realizando el análisis modal que en este apartado se ha explicado el problema de la estabilidad se reduce a buscar los valores de ω_k que hacen que el sistema tenga una estabilidad marginal y según lo comentado en el párrafo anterior esto sucede cuando $\omega_{k,r} = 0$ (independientemente de la frecuencia de la respuesta, $\omega_{k,i}$), pues en estos casos la respuesta del sistema ni se amplifica ni se amortigua. Interesa realizar dicha búsqueda porque estos valores de ω_k separan los estados en los cuales el sistema es estable de aquellos en los que es inestable para cada uno de los modos k . No obstante, también se suele realizar una comparación de la inestabilidad de los distintos modos, con la idea de encontrar el más inestable puesto que la inestabilidad de éste será la que probablemente (a no ser que otros fenómenos no lineales tengan más importancia) se desarrolle más rápido y se observe en un caso real.

A continuación se van a mostrar las ecuaciones de las que se debe partir para estudiar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz siguiendo el método que se acaba de describir. Obviamente también son las ecuaciones que en este trabajo se van a resolver de manera numérica para estudiar dicha inestabilidad.

1. Ecuación de la continuidad

La forma general de esta ecuación viene dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (7)$$

donde ρ es la densidad del fluido, t es el tiempo y \vec{V} es el vector velocidad.

Pero como el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se va a realizar para fluidos incompresibles, la ecuación se puede simplificar, quedando con el siguiente aspecto:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (8)$$

Y desarrollando la divergencia, esta ecuación adquiere la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

2. Ecuación de la cantidad de movimiento

La forma general de esta ecuación viene dada por:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}_{ij} \quad (10)$$

siendo \vec{g} el vector fuerza de gravedad, p la presión y $\vec{\tau}_{ij}$ el tensor de esfuerzos viscosos.

Teniendo en cuenta que los fluidos que se van a usar en el estudio que se va a llevar a cabo son newtonianos con densidad y viscosidad constantes la ecuación anterior tomaría la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (11)$$

donde μ representa el coeficiente de viscosidad.

Si descomponemos esta última ecuación en las tres coordenadas daría lugar a las tan conocidas ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (12)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (13)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (14)$$

3.2.1. Caso de dos fluidos con densidades distintas

En el libro de Chandrasekhar [15] se aplica precisamente el procedimiento general que se ha descrito previamente a las ecuaciones anteriores para encontrar unos resultados teóricos que predigan la aparición de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Concretamente se realizan los desarrollos matemáticos para dos fluidos con distintas densidades (siendo el inferior el más denso) separados por una frontera en $y = 0$ y contenidos entre dos paredes rígidas situadas en $y = d$ e $y = -d$, lo que implica que la velocidad perpendicular a las paredes en $y = d$ e $y = -d$ es nula. Además el problema se reduce a un caso bidimensional y se desprecian los efectos de la viscosidad. En este trabajo no se va a mostrar el proceso matemático que hay que llevar a cabo por no hacer demasiado complejo este primer apartado, además dicho proceso esta perfectamente explicado en el libro de Chandrasekhar [15]. No obstante se van a mostrar los resultados obtenidos pues se van a usar en capítulos venideros para llevar a cabo la validación de los resultados.

El primero de los resultados indica que la diferencia mínima de velocidades existente entre los dos fluidos ΔU para que aparezca la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz viene dado por la ecuación (15):

$$\Delta U^2 > \frac{2}{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{\frac{\sigma g(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (15)$$

En la ecuación anterior σ es la tensión superficial existente entre los dos fluidos, g es la fuerza de la gravedad, ρ_1 es la densidad del fluido inferior y ρ_2 la densidad del superior, además se le llama α_1 y α_2 a :

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \quad (16)$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (17)$$

Por otra parte el número de onda crítico (k_{cr}), que es el mínimo número de onda de la perturbación necesario para que aparezca la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, viene dado por:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{k_{cr}^2} = \frac{\sigma}{g(\rho_1 + \rho_2)} \quad (18)$$

Introduciendo la definición de α_1 y α_2 en las ecuaciones (15) y (18) y desarrollándolas se obtienen unas expresiones mucho más sencillas y fáciles de interpretar, dichas expresiones son:

$$\Delta U^2 > 2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) g \sigma} \quad (19)$$

$$k_{cr}^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\sigma} \quad (20)$$

No hay que olvidar que una vez que se conoce el número de onda, calcular la longitud de onda es muy fácil puesto que:

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{k_{cr}} \quad (21)$$

Esta última ecuación se muestra porque a lo largo de este trabajo se va a preferir hablar de longitud de onda en vez de número de onda.

La principal conclusión a la que se puede llegar analizando los resultados mostrados es que cuanto mayor sea la tensión superficial, la gravedad o la diferencia de densidades mayor va a ser la diferencia de velocidades entre los dos fluidos necesaria para que aparezca la inestabilidad. Esto indica que estas tres magnitudes son unos aspectos estabilizadores, que impiden o retrasan la aparición de la inestabilidad. A lo largo de este trabajo se analizarán estos efectos de manera mucho más detallada.

Por último es necesario aclarar que los resultados que se han mostrado en esta apartado a pesar de haber sido obtenidos del libro de Chandrasekhar [15] ya fueron calculados y publicados previamente por Kelvin, concretamente en el año 1868 [2].

4. Descripción de las simulaciones realizadas

Como ya se ha dicho anteriormente en este trabajo se va a estudiar numéricamente la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en dos situaciones distintas, en la primera de ellas se usará un único fluido y en la segunda se usarán dos fluidos distintos.

Para realizar las simulaciones se va a usar el software OpenFOAM y en ambos casos las simulaciones van a ser bidimensionales.

4.1. Simulación con un único fluido

Para que se produzca la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es imprescindible que exista una región en la cual se produzca una diferencia de velocidades, es decir, es necesario que dos flujos con distintas velocidades estén en contacto (aspecto que ya se ha comentado en apartados anteriores). Sin embargo no es necesario que los dos flujos que estén en contacto sean fluidos distintos, si esto no fuera así esta simulación no tendría ningún sentido.

Tal y como se ha visto en el subapartado 3.2 las inestabilidades aparecen debido a pequeñas perturbaciones que se introducen en el sistema. Estas inestabilidades en la naturaleza están siempre presentes puesto que no existe el estado ideal. En cuanto a las simulaciones llevadas a cabo en este trabajo, las perturbaciones son de tipo numérico, es decir, aparecen inicialmente debido al error inherente en todo cálculo llevado a cabo con un ordenador.

Como se puede observar en la figura 7, el sistema que se desea estudiar no es más que dos flujos paralelos bidimensionales con distintas velocidades (un flujo sobre el otro) que entran en contacto en la zona intermedia. Es preciso aclarar que los flujos inicialmente solo tienen velocidad en la dirección “x” (en la figura 7 se puede observar el sistema de coordenadas usado, siendo el origen de éste la esquina inferior izquierda del dominio estudiado). Cada uno de los flujos ocupa al comienzo de la simulación medio dominio en la dirección “y”, además la velocidad es uniforme en cada parte del dominio.

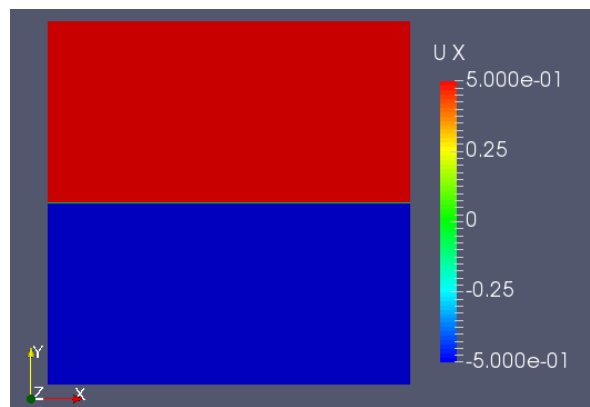


Figura 7: Estado inicial del sistema que se va a estudiar.

En la simulación que se muestra en la figura 7 se estableció que los dos flujos tuviesen inicialmente direcciones opuestas (el flujo superior va hacia la derecha y el inferior hacia la izquierda, ambos con una velocidad de 0.5 m/s) pero esto (como se verá en apartados posteriores) no es un requisito para que aparezca la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Para establecer estas velocidades se ha usado la herramienta “setFields” que sirve para asignar unos determinados valores iniciales a las variables que se desee (escalares o vectoriales) en cada una de las regiones del dominio.

En cuanto a las condiciones de contorno, se ha establecido que la parte superior e inferior del dominio sean paredes que se mueven con una velocidad constante durante toda la simulación. La velocidad que se le da a estas paredes es la misma que tienen en el instante inicial el flujo que este en contacto con ellas. En el caso concreto que se muestra en la figura 7, la pared superior tendrá una velocidad de 0.5 m/s y la inferior de -0.5 m/s. En las distintas simulaciones se buscará siempre que estas paredes no influyan en el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (que se dará en la parte central del eje “y”) puesto que su efecto no es algo que se quiera estudiar en este trabajo.

Por otra parte se han establecido condiciones de periodicidad, es decir, el flujo que sale por uno de los laterales del dominio entra por el otro con las mismas propiedades que salió. Si no se usaran estas condiciones de periodicidad se tendría que estudiar un dominio con una gran longitud en la dirección “x” para que de esta forma se pudiese apreciar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en las zonas centrales del eje “x”. No obstante el uso de dichas condiciones periódicas introduce una pequeña limitación, puesto que acota el tamaño de los fenómenos que se pueden observar. En el caso concreto que se va a estudiar en este trabajo, las condiciones de periodicidad lo que limitan es el tamaño del torbellino más grande que puede aparecer, de forma que como máximo puede ser igual de grande que el dominio.

Para llevar a cabo la simulación se ha usado una malla rectangular cuyo único requerimiento es que en la zona central del eje “y” (donde están en contacto los dos flujos) haya un mayor número de celdas (celdas más pequeñas) para de esta forma poder calcular los pequeños torbellinos que aparecen debido a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. En el apartado 7 se darán mas detalles sobre las distintas mallas usadas y las consecuencias de usar mallas más o menos finas.

En esta simulación se ha usado el “solver” icoFoam que resuelve flujos incompresibles, transitorios (los resultados dependen del tiempo), laminares e isoterms (no hay que resolver la ecuación de la conservación de la energía). Por lo tanto dicho “solver” resuelve la ecuación de la continuidad y las de Navier-Stokes, además lo hace usando el algoritmo PISO (explicado tras la ecuación 23).

Es preciso aclarar que cuando se habla de presión al usar el “solver” icoFoam se refiere siempre a presión partido de densidad. Además icoFoam ignora la gravedad a la hora de realizar los cálculos. Teniendo en cuenta estos dos aspectos y desarrollando la derivada total, la ecuación de la cantidad de movimiento que resuelve icoFoam sería la siguiente (para más información sobre el “solver” icoFoam véase la referencia [16]):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\tau} \quad (22)$$

donde la variable $\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos.

Las simulaciones que se van a llevar a cabo en este trabajo van a ser todas con fluidos newtonianos (icoFoam solo resuelve flujos newtonianos). Debido a esto, dicho tensor se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{\tau} = \nu \left(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T \right) \quad (23)$$

siendo ν el coeficiente de viscosidad cinemática que no es más que el coeficiente de viscosidad dinámica entre la densidad.

Como se ha comentado anteriormente, icoFoam usa el algoritmo PISO. Dicho algoritmo está compuesto por dos bucles que en cada instante de tiempo vuelven a calcular la velocidad y la presión el número de veces que el usuario le diga, con el objetivo de corregir posibles errores. El primero de los bucles vuelve a calcular la velocidad y dentro de este existe un segundo bucle que corrige la presión con la cual a su vez se vuelve a corregir la velocidad (en la referencia [16] se puede encontrar más información sobre este algoritmo). Durante las simulaciones llevadas a cabo con icoFoam en este trabajo únicamente se ha usado el bucle exterior (el que calcula la velocidad) y se ha establecido dos iteraciones en cada instante de tiempo.

Tras resolver las ecuaciones para cada uno de los instantes de tiempo especificados (en el apartado 7 se hablará de los δt tomados en cada una de las simulaciones y de su influencia en los resultados) ya se tiene la velocidad en dichos instantes pero para poder observar mejor la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es necesario calcular la vorticidad. Para ello se ha usado la herramienta “vorticity” que lo que hace es calcular el rotacional de \vec{V} en cada instante de tiempo que por definición es la vorticidad.

4.2. Simulación con dos fluidos

La segunda parte del estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se ha realizado usando un fluido distinto en cada uno de los flujos. De esta forma los dos flujos no solo tienen una velocidad distinta sino que también cambia la densidad y la viscosidad. Para realizar estas nuevas simulaciones la forma de la malla y las condiciones de contorno usadas han sido las mismas. Además se ha vuelto a usar la herramienta de postprocesado “vorticity”. Sin embargo el “solver” que se ha usado sí varía, lo cual cambia bastante la forma de realizar los cálculos y la simulación en general.

En este caso las simulaciones se han realizado con interFoam que sirve para resolver flujos de 2 fluidos incompresibles, isoterms e inmiscibles [17]. La solución que se obtiene es transitoria y para llegar a ella se usa el método VOF (explicado en el siguiente párrafo) además del ya comentado algoritmo PISO. Es preciso aclarar que ahora sí se ha usado el bucle interno del algoritmo PISO (recuérdese que en las

simulaciones con icoFoam no se usó), concretamente se ha establecido que el bucle externo se haga una solo vez y el interno 3.

El método VOF (Volume of Fluid) calcula las propiedades (densidad, viscosidad) del fluido que se encuentra en una celda mediante el uso de la variable fracción de volumen (α). Dicha variable puede tomar un valor comprendido entre 0 y 1 en cada celda, de forma que, si en la simulación tenemos un fluido “x” y otro “y” se tendrá la siguiente casuística:

- $\alpha = 1$: La celda solo contiene fluido “x”.
- $\alpha = 0$: La celda solo contiene fluido “y”.
- $0 < \alpha < 1$: La celda contiene ambos fluidos y el valor de α será proporcional al volumen que haya de cada uno. Es decir, α será más cercano a 1 cuanto mayor volumen de fluido “x” haya en la celda.

A la variable α al igual que a las demás hay que darle un valor inicial, para ello se ha usado la herramienta “setFields” que ya fue explicada en el apartado anterior. En las simulaciones realizadas, lo que se ha hecho es establecer que en la mitad inferior del dominio $\alpha = 1$ y en la superior $\alpha = 0$ como se observa en la figura 8. Obviamente las dos regiones en las que se divide el dominio para establecer un valor inicial de α son las mismas que se usa para inicializar los valores de la velocidad, no hay que perder de vista que lo que se está simulando son dos flujos con distintos fluidos y velocidades.

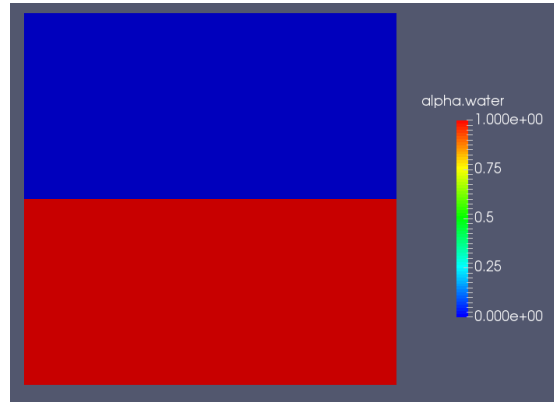


Figura 8: Valores iniciales de la variable α .

Con el método VOF lo que se consigue es que en cada celda el fluido tenga unas únicas propiedades y por lo tanto solo se tiene que resolver una única ecuación de cantidad de movimiento (en cada celda). Concretamente las ecuaciones que se usan para calcular las propiedades del fluido en cada celda son:

$$\rho = \alpha\rho_x + (1 - \alpha)\rho_y \quad (24)$$

$$\mu = \alpha\mu_x + (1 - \alpha)\mu_y \quad (25)$$

donde ρ_x y μ_x son la densidad y la viscosidad dinámica del fluido “x” respectivamente y ρ_y y μ_y las del fluido “y”.

Para calcular la evolución de la fracción de volumen α se usa la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \alpha) + \nabla \cdot [\vec{V}_r \alpha (1 - \alpha)] = 0 \quad (26)$$

La variable \vec{V}_r se llama velocidad de compresión de interfase (“interface compression velocity”) y representa la velocidad relativa existente en cada fase entre los dos fluidos (véase el artículo [18] para obtener más detalles sobre esta variable). Es necesario aclarar que esta variable no tiene sentido en aquellas fases en las que solo haya un fluido, debido a esto, el último término de la ecuación (26) (es precisamente en el que está presente \vec{V}_r) es nulo para $\alpha = 0$ y para $\alpha = 1$.

A continuación se muestra la forma exacta de la ecuación de la cantidad de movimiento que resuelve el “solver” interFoam [18]. La ecuación de la continuidad no aparece en esta sección porque, como es de esperar, es la misma que se mostró en el apartado 3.2.

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{g} + f_\sigma \quad (27)$$

Como se observa en la ecuación anterior, este “solver” a diferencia de icoFoam si usa la gravedad para realizar los cálculos. Además en este caso la ecuación no está dividida entre ρ , de forma que ahora cuando se habla de presión si se hace referencia a la presión con sus verdaderas unidades. Por el mismo motivo, la fórmula que se usa para calcular el tensor de esfuerzos viscosos es ligeramente distinta, puesto que ahora no aparece la viscosidad cinemática sino la dinámica y consecuentemente sus unidades también serán distintas.

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \left(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T \right) \quad (28)$$

La última diferencia de la ecuación de la cantidad de movimiento con respecto a la de la simulación anterior es que ahora aparece un nuevo término f_σ debido a la fuerza superficial que existe entre los dos fluidos que se simulan. El solver “interFoam” calcula dicho termino de la siguiente forma [19]:

$$\vec{f}_\sigma = \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (29)$$

En la ecuación anterior, σ es el coeficiente de tensión superficial existente entre los dos fluidos que intervienen en la simulación y κ es la curvatura media de la interfaz entre los dos fluidos, dicha curvatura se calcula de la siguiente forma.

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \quad (30)$$

Es preciso aclarar que en las simulaciones llevadas a cabo con el solver “interFoam” se considera que la tensión superficial existente entre los dos fluidos σ es constante, si esto no fuese así la ecuación (29) no sería válida.

5. Análisis dimensional

En la sección anterior se ha explicado de manera detallada qué simulaciones se van a llevar a cabo y que métodos se van a usar para realizarlas. Una vez entendido esto, es preciso realizar un análisis dimensional de los dos fenómenos que se van a simular para de esta forma poder mostrar unos resultados concisos y no repetitivos de los estudios realizados.

Como no puede ser de otra forma, el análisis dimensional en el caso en el que hay un único fluido va a ser diferente al correspondiente al estudio con dos fluidos. Es por esto que se van a realizar ambos por separado. Por último en esta sección se le dedica un apartado a las variables que entran en juego debido únicamente a la propia simulación.

5.1. Un único fluido

Las variables que intervienen en el fenómeno que se estudia en la simulación con un único fluido son:

- g : gravedad (m/s^2).
- U_0 : diferencia de velocidad entre los dos flujos en valor absoluto (m/s).
- L : longitud característica del estudio (m), en ambas simulaciones se va a tomar la distancia entre las dos paredes verticales (las que limitan el periodo que se estudia).
- ν : viscosidad cinemática del fluido (m^2/s).

Observando las unidades de las variables que intervienen en el problema se llega inmediatamente a la conclusión de que las unidades fundamentales son 2: longitud y tiempo. Tomando U_0 y L como variables independientes y usando el teorema de Pi de Buckingham [20] se concluye que existirán 2 números adimensionales.

Por una parte aparece el número de Reynolds.

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (31)$$

Y por otra el inverso del número de Froude.

$$\frac{1}{Fr} = \frac{Lg}{U_0^2} \quad (32)$$

Con este análisis el problema que inicialmente dependía de 4 variables pasa a depender de tan solo dos parámetros adimensionales. Además en algunos de los estudios (como se verá en apartados venideros) se ignora el efecto de la gravedad, de tal forma que el inverso del número de Froude será nulo y el resultado solo dependerá del número de Reynolds.

5.2. Dos fluidos

En este caso las variables que influyen en el estudio son:

- g : gravedad (m/s^2).
- U_0 : diferencia de velocidad entre los dos flujos en valor absoluto (m/s).
- L : longitud característica del estudio (m), es la distancia entre las paredes verticales como ya se dijo anteriormente.
- μ_1 : viscosidad dinámica del fluido inferior (kg/ms)
- μ_2 : viscosidad dinámica del fluido superior (kg/ms).
- ρ_1 : densidad del fluido inferior (kg/m^3).
- ρ_2 : densidad del fluido superior (kg/m^3).
- σ : tensión superficial entre los dos fluidos (kg/s^2).

Ahora las unidades fundamentales que intervienen en el problema son 3: longitud, masa y tiempo. Usando de nuevo el teorema de Pi de Buckingham [20] y tomando U_0 , L y ρ_2 como variables independientes se llega a la conclusión de que existen 5 grupos adimensionales.

El primer conjunto adimensional que entra en juego es el número de Reynolds del fluido superior:

$$Re_2 = \frac{\rho_2 U_0 L}{\mu_2} \quad (33)$$

Por otra parte aparece un número de Reynolds al que se llamará Re_{μ_1} . No se le denomina Re_1 porque en su expresión aparece la densidad del fluido superior (ρ_2) que es la que se ha elegido como variable independiente.

$$Re_{\mu_1} = \frac{\rho_2 U_0 L}{\mu_1} \quad (34)$$

Vuelve a aparecer el inverso del número de Froude:

$$\frac{1}{Fr} = \frac{Lg}{U_0^2} \quad (35)$$

También está presente el inverso del número de Weber que da una idea de la importancia relativa de la inercia de los fluidos frente a la tensión superficial existente entre éstos.

$$\frac{1}{We} = \frac{\sigma}{\rho_1 L U_0^2} \quad (36)$$

Y por último se obtiene un quinto grupo adimensional que relaciona las densidades de los dos fluidos.

$$\pi_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (37)$$

Sin embargo a este análisis adimensional se le va a realizar una pequeña variación con la intención de tener dos números de Reynolds “bien definidos” y no el Re_{μ_1} que se ha obtenido previamente. De forma que se definirá un nuevo Re_1 que sustituirá al anterior y que adoptará la siguiente forma:

$$Re_1 = Re_{\mu_1} \pi_\rho = \frac{\rho_2 U_0 L}{\mu_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 U_0 L}{\mu_1} \quad (38)$$

Este procedimiento se ha realizado porque a la hora de obtener conclusiones de los resultados es más lógico y sencillo hablar de dos números de Reynolds y no usar un conjunto que relaciona las fuerzas inerciales del fluido superior con las viscosas del inferior.

Una vez realizado esta modificación el análisis dimensional quedaría finalizado, consiguiéndose reducir el número de parámetros que influyen en el problema de 8 variables a 5 grupos adimensionales.

5.3. Variables propias de la simulación

Las variables de las que se ha hablado en los apartados anteriores son variables físicas que estarían presente en un experimento real de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. No obstante en las simulaciones entran en juego otras variables que en la realidad no existirían y que aparecen debido a que es necesario discretizar tanto el tiempo como el dominio para llevar a cabo los cálculos matemáticos. Estas nuevas variables serían las mismas independientemente de si se lleva a cabo una simulación con un único fluido o con dos:

- δt : intervalo de tiempo existente entre cada uno de los instantes en los que se resuelven las ecuaciones (s).
- δx : mínima longitud horizontal de las celdas de la malla (m).
- δy : mínima longitud vertical de las celdas de la malla (m).
- H : distancia entre las paredes horizontales (m).

Esto añadiría cuatro variables a las ya existentes en cada uno de los análisis dimensionales lo que conlleva la aparición de cuatro nuevos grupos adimensionales que serían iguales para las simulaciones llevadas a cabo con uno o dos fluidos.

Hay que aclarar que las unidades fundamentales en cada una de las simulaciones no varían a pesar de que entren en juego unas nuevas variables. De forma que para

la simulación con un solo fluido las variables independientes continuarían siendo U_0 y L y en el caso de la presencia de dos fluidos también se mantendrían las mismas (U_0 , L y ρ_2).

El primer conjunto adimensional que aparece al realizar el análisis dimensional es:

$$\pi_1 = \frac{U_0 \delta t}{L} \quad (39)$$

También aparecería el número de celdas en la dirección horizontal n .

$$n = \frac{L}{\delta x} \quad (40)$$

Hay que aclarar que si la malla no tuviese el tamaño de celda constante en la dirección “x” este grupo adimensional no se correspondería con el número de celdas en la dirección horizontal.

Y además entrarían en juego los siguientes dos grupos adimensionales:

$$\pi_2 = \frac{H}{L} \quad (41)$$

$$\pi_3 = \frac{L}{\delta y} \quad (42)$$

El igual que se hizo en el subapartado anterior, se va a realizar una pequeña modificación en el primero de los conjuntos adimensionales que se ha obtenido (π_1). En este caso se va a realizar para que aparezca el número de Courant que es uno de los conjuntos adimensionales más importantes a la hora de controlar la precisión de una simulación. La variación que se ha llevado a cabo es la siguiente:

$$Co = \pi_1 n = \frac{U_0 \delta t}{L} \frac{L}{\delta x} = \frac{U_0 \delta t}{\delta x} \quad (43)$$

Es importante resaltar que el estudio de estos números adimensionales no conlleva ningún resultado físicamente importante. Es decir, los grupos adimensionales que realmente se van a estudiar son los mostrados en los subapartados anteriores pero también es importante tener los grupos adimensionales propios de la simulación claros. Lo que siempre se va a buscar es que éstos grupos adimensionales se encuentren en un rango en el que sus variaciones no afecten a los resultados de las simulaciones.

6. Comparación icoFoam vs interFoam

En este apartado se van a comparar los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas con los “solvers” icoFoam e interFoam.

Lo primero que hay que aclarar es que interFoam también se puede usar en simulaciones en las que solo haya un fluido. No obstante habría que definir dos fluidos pero asignándoles las mismas propiedades físicas. De esta forma aunque los dos fluidos se mezclen y α tome valores distintos de 0 y 1, al usar las ecuaciones (24) y (25) el resultado siempre será la densidad y viscosidad que se le haya dado a los dos fluidos. Por otra parte no hay que olvidar establecer una tensión superficial nula para simular la existencia de un solo fluido. Una vez realizadas estas dos operaciones la ecuación de la cantidad de movimiento que resuelven ambos “solvers” sería la misma exceptuando la aparición de la gravedad en la ecuación de interFoam, no obstante, como en todo el dominio los fluidos tienen la misma densidad el hecho de que a todas las partículas se le aplique una misma fuerza (igual módulo y dirección) no cambia nada (esto se comprobará en el subapartado 10.1). Por lo tanto bajo estas condiciones interFoam resolvería las mismas ecuaciones pero adicionalmente calcularía el valor de α que mostraría en todo momento si las partículas del flujo superior invaden la mitad inferior del dominio o viceversa.

A pesar de lo dicho en el párrafo anterior los resultados a los que llegan dichos “solvers” no han sido los mismos. La causa de las diferencias obtenidas radica en los errores de cálculo iniciales de la velocidad vertical que se producen en la línea central del dominio. Lo que sucede es que con icoFoam los errores se concentran en la entrada y salida mientras que con interFoam los errores aparecen perfectamente distribuidos a lo largo de toda la línea central. Esto que se acaba de comentar se puede observar perfectamente en las figuras 9 y 10, donde se han mostrado los resultados para las simulaciones llevadas a cabo con un número de Reynolds de 10^5 . Por otra parte los errores que introduce icoFoam son de un orden de magnitud de 10^{-6} mientras que los de interFoam son de un orden de 10^{-14} .

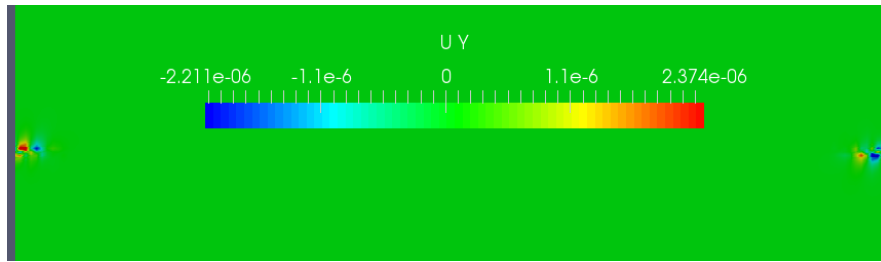


Figura 9: Velocidad vertical en el instante 5 para un $Re = 1 \cdot 10^5$. IcoFoam

Esta diferencia es muy relevante puesto que en interFoam los errores se van realimentando de forma que poco a poco van aumentando de tamaño (zonas rojas y azules más grandes) y de intensidad, pero siempre de manera uniforme a lo largo de toda la línea central. De forma que cuando estos errores son lo suficientemente grandes como para provocar la aparición de los primeros vórtices (en el apartado 8 se explica a que se le llama primeros vórtices) éstos aparecen también de manera

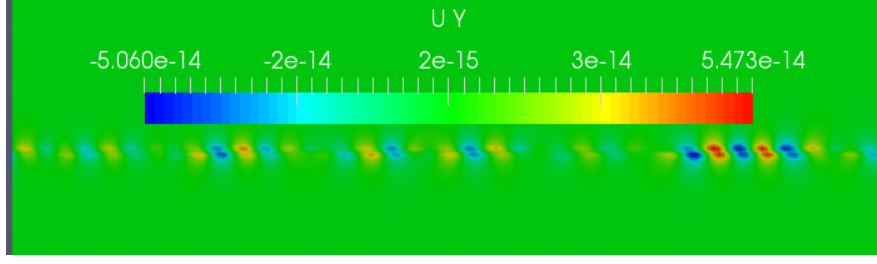


Figura 10: Velocidad vertical en el instante 5 para un $Re = 1 \cdot 10^5$. InterFoam

uniforme. Sin embargo cuando se usa el “solver” icoFoam los errores iniciales que aparecen en la entrada y salida alcanzan un tamaño e intensidad suficiente para desarrollar los primeros vórtices antes de que aparezcan errores en toda la línea central. En las figuras 11a y 11b se puede apreciar claramente lo que se acaba de comentar en este párrafo, estas capturas también son de simulaciones con $Re = 1 \cdot 10^5$.

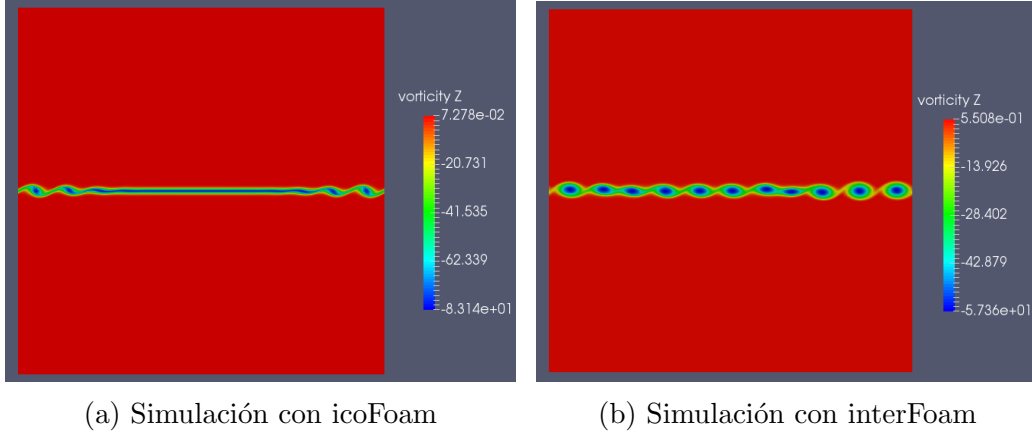


Figura 11: Componente “z” de la vorticidad cuando aparecen los vórtices iniciales

Hay que aclarar que lo que sucede en experimentos reales es mucho más parecido a los resultados obtenidos con interFoam. Es decir, las perturbaciones iniciales en la naturaleza aparecen de manera uniforme en la región de contacto existente entre los dos flujos. Además hay que tener en cuenta que el final del dominio (tanto por la izquierda como por la derecha) es totalmente artificial (recordar que se está simulando un dominio periódico) y por lo tanto no hay ningún motivo para que las perturbaciones sean más intensas en estas zonas.

Es preciso resaltar que las condiciones de contorno y la malla usadas han sido exactamente las mismas en los dos “solvers”, de forma que es evidente que la diferencia radica en la forma de realizar los cálculos de icoFoam. Cuando se observaron estas diferencias, se realizaron diversas modificaciones en las condiciones de contorno que se le introducía a icoFoam para tratar de disminuir esos errores iniciales en el cálculos de la velocidad vertical en la entrada y salida pero no se pudo conseguir.

Debido a todo esto, a partir de este apartado en todas las simulaciones que se van a llevar a cabo se va a usar el “solver” interFoam, ya sean simulaciones en las que entren en juego dos fluidos o un solo fluido.

7. Estudio de convergencia

En ese apartado se va a realizar un estudio de convergencia con el objetivo de garantizar que la precisión de la simulación es la idónea y que por lo tanto aumentándola no se consiguen mejores resultados sino sólo un número de cálculos innecesario.

Para realizar este estudio de convergencia lo que se ha hecho es ir aumentando progresivamente la resolución de la malla (se ha ido duplicando por dos el número de celdas que forman la malla) a la vez que se comprobaba si el resultado de la simulación iba variando. El objetivo es llegar a un punto en el cual al duplicar el número de celdas se obtenga el mismo resultado (o muy similar) que en la simulación anterior de forma que se podría afirmar que la última duplicación es innecesaria, llegados a dicho punto se podría confirmar que los resultados ya han convergido.

Hay que aclarar que además de realizar un estudio de convergencia hay que comparar los resultados obtenidos con otros realizados previamente por otros autores, es decir, es necesario validar los resultados. Estas validaciones se pueden hacer usando datos experimentales o simulaciones. En este trabajo para validar el modelo se ha simulado un experimento llevado a cabo en 1969 por S.A. Thorpe [5] que además también fue simulado en el año 2010. De forma que los resultados obtenidos en dicha simulación se han comparado con los datos experimentales y con los de una simulación previa a la aquí realizada. Dicha validación se muestra en el apartado 14.

Antes de mostrar el estudio de convergencia se va a proceder a explicar la malla que se ha usado. Como ya se ha dicho en apartados anteriores, se ha usado una malla con celdas rectangulares y cuyo requisito fundamental es que en la región de contacto entre los dos flujos haya una mayor resolución, pues es ahí donde va a aparecer la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Como se ve en la figura 12 la malla se ha dividido en cuatro dominios y la primera condición que se ha establecido es que en los dos dominios más cercanos a la línea central (zonas en rojo en la figura) haya el doble de celdas que en los dominios exteriores. Por otra parte, se ha realizado un “degradado” en la dirección “y” a lo largo de toda la malla. Es decir, en cada una de las cuatro partes en las que se ha dividido la malla, las celdas que están más cercas al centro son el doble de pequeñas que las que están más alejadas.

Consecuentemente, lo que se ha conseguido es que las celdas que están en el centro de la malla sean cuatro veces más pequeñas que las que están en las paredes superiores o inferiores.

En la dirección “x” la estructura de la malla es mucho más simple pues en esta dirección todas las celdas de la malla tienen el mismo tamaño.

A lo largo de este trabajo se ha observado como al aumentar el número de Reynolds aparecen vórtices más pequeños en el centro de la malla (región de contacto entre los dos flujos). Por lo tanto a medida que se aumente el número de Reynolds se necesita aumentar también la resolución de la malla para poder calcular esos vórtices que cada vez son más pequeños. Esta conclusión se explicará de manera mucho más detallada en la sección 9, no obstante era preciso aclararlo en este apartado porque

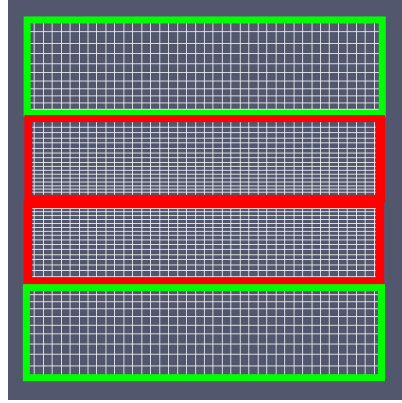


Figura 12: Forma de la malla

debido a ese hecho, el estudio de convergencia de una malla para un determinado número de Reynolds no implicará que éste sea válido para Reynolds superiores aunque sí para inferiores.

Una vez aclarado todos estos aspectos se pasará a mostrar los resultados del estudio de convergencia para un único fluido y para dos fluidos distintos.

7.1. Simulaciones con un único fluido

En este caso el estudio de convergencia se ha realizado para un número de Reynolds de $1 \cdot 10^5$. Lo que se ha estudiado para poder decir que la malla tiene la suficiente resolución es el tamaño de los vórtices iniciales o lo que es lo mismo, el número de vórtices que aparecen inicialmente. Hay que tener en cuenta que los vórtices iniciales son los más pequeños puesto que posteriormente estos se van uniendo entre ellos y van formando otros más grandes (esto se explicará de manera más detallada en el apartado 8), por lo tanto que la malla tenga resolución suficiente para calcular los vórtices iniciales garantiza que podrá calcular bien el resto de la simulación.

La primera simulación se realizó con la malla que aparece en la figura 12 que como se observa en la tabla 1 tiene un total de 2400 celdas, 40×10 en los dominios exteriores y 40×20 en las zonas interiores (estos dominios también se pueden apreciar en la figura 12).

	Número de celdas	Número de torbellinos iniciales
Malla 1	2400	3
Malla 2	4800	6
Malla 3	9600	11
Malla 4	19200	11

Cuadro 1: Estudio de convergencia de la simulación con $Re = 1 \cdot 10^5$

Como se observa en la tabla anterior hasta la simulación de la Malla 4 no se obtuvo el mismo número de vórtices que en la malla anterior.

En el mosaico de figuras 13 se puede observar el número, el tamaño y la intensidad máxima de los vórtices iniciales para cada malla. Se aprecia como a medida que se aumenta la resolución, los primeros vórtices que se observan son más pequeños en tamaño y con una mayor intensidad. La mayor intensidad es debido a que los primeros vórtices (en el apartado 9 se aclarará a que se ha llamado primeros vórtices) en las mallas 3 y 4 aparecen mucho antes en el tiempo que los de las mallas 1 y 2. Así que cuando aparecen los vórtices en las mallas 3 y 4, los flujos tienen mayor energía cinética lo que implica una mayor vorticidad (esto también se explicará de manera más detallada en el siguiente apartado).

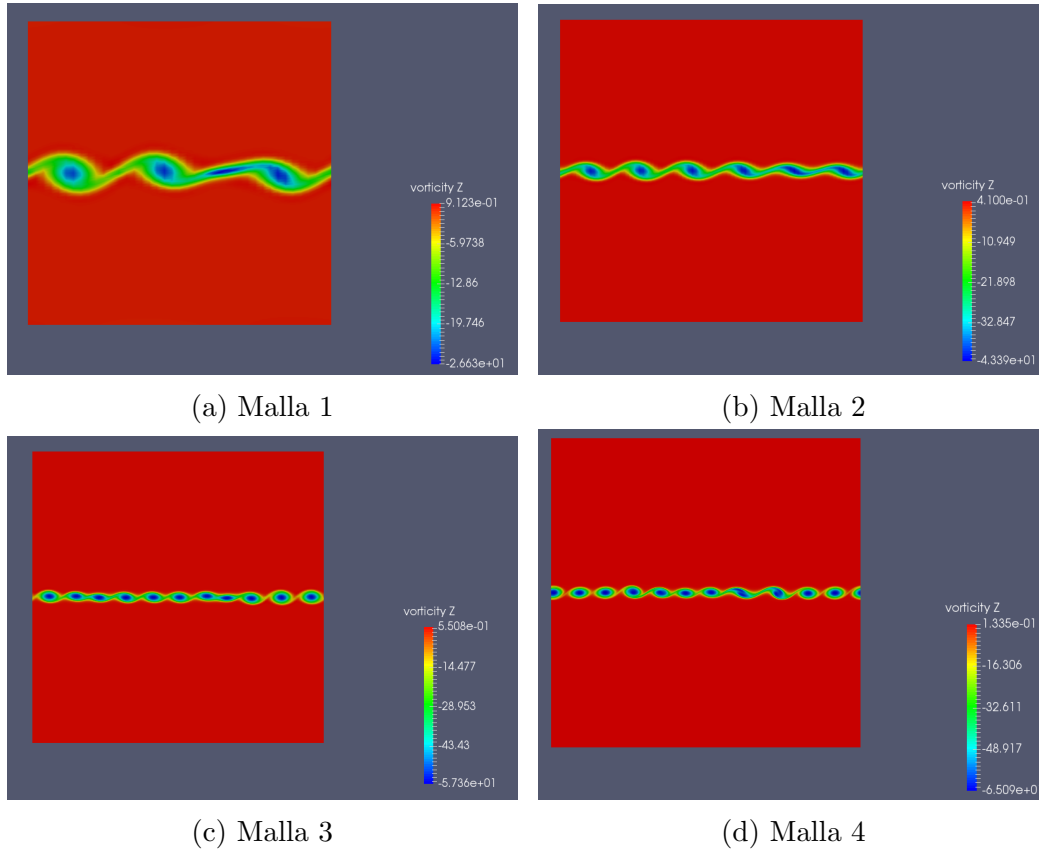


Figura 13: Primeros vórtices para cada una de las mallas con $Re = 1 \cdot 10^5$

Comparando los resultados que se han mostrado en la tabla y las figuras se puede concluir que las mallas 1 y 2 no tienen la suficiente resolución puesto que su resultado difiere demasiado de la malla 3.

Por otra parte, los resultados de la malla 3 y 4 si son muy similares aunque no idénticos. El número de vórtices iniciales es exactamente el mismo (11) aunque si es cierto que la intensidad de estos en la malla 4 es superior puesto que los vórtices se desarrollan antes en la simulación realizada con la malla 4. Es decir, la malla 4 calcula unas pequeñas inestabilidades que la 3 no es capaz de calcular pero la diferencia entre las dos simulaciones es tan pequeña que se puede afirmar que la malla 3 tiene una resolución adecuada para estudiar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz a este número de Reynolds ($Re = 1 \cdot 10^5$) y consecuentemente para cualquier número de Reynolds inferior.

A continuación se intentó converger los resultados para $Re = 1 \cdot 10^6$ usando la malla 3 y 4, pero en este caso los resultados sí variaron mucho de una malla a otra. Como se puede observar en el mosaico de figuras 14, con la malla 3 aparecen 13 vórtices inicialmente mientras que con la malla 4 se crean 23, además los de la malla 4 son el doble de intensos y tienen la mitad de tamaño aproximadamente.

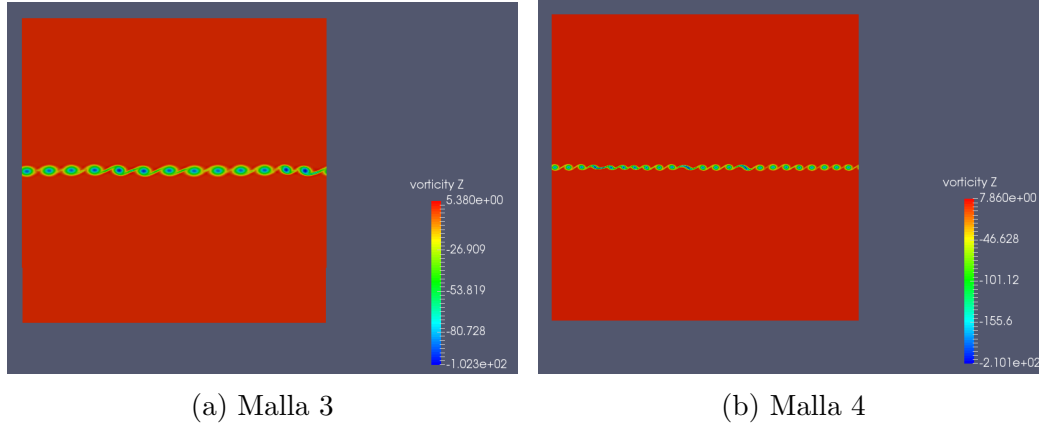


Figura 14: Primeros vórtices para las mallas 3 y 4 con $Re = 1 \cdot 10^6$

El siguiente paso sería realizar una simulación con una malla 5 que tuviese el doble de resolución que la 4. Sin embargo, realizar dicha simulación es inviable teniendo en cuenta los recursos informáticos de los que se dispone. Así que para $Re = 1 \cdot 10^6$ no se ha podido converger los resultados.

7.2. Simulaciones con dos fluidos

A continuación se realizó el mismo proceso que se ha explicado en el subapartado anterior pero en este caso para las simulaciones con dos fluidos. Como se ha explicada en el apartado 5, cuando la inestabilidad se produce entre dos fluidos distintos, entran en juego dos números de Reynolds. Es sabido que al aumentar cualquiera de los dos números de Reynolds aumenta el número de vórtices iniciales que aparecen, esto se demostrará en la sección 9.

Tras realizar distintas simulaciones y sabiendo que la malla con mayor resolución que se puede usar es la 4 (19200 celdas) el estudio de convergencia a mayor números de Reynolds que se ha podido realizar ha sido para $Re_1 = 5 \cdot 10^5$ y $Re_2 = 1 \cdot 10^5$. En dicha simulación se ha establecido una gravedad nula ($1/Fr = 0$) y además se ha anulado el efecto de la tensión superficial ($1/We = 0$). Por último se ha establecido que la densidad del fluido inferior (fluido 1) sea 10 veces mayor a la del superior, de forma que $\rho_1/\rho_2 = 10$.

Al realizar los cálculos sucedió exactamente lo mismo que sucedía en las simulaciones de un solo fluido, es decir, a medida que se aumentaba la resolución de la malla se obtenía un mayor número de vórtices y consecuentemente éstos tenían un tamaño menor. En la tabla 2 se muestra el número exacto de vórtices iniciales que aparecían para cada malla. Por otra parte, en el mosaico 15 se muestran las perturbaciones iniciales que existen en la línea central para cada una de las mallas, no hay

que olvidar que hablar de vórtices y de “picos” de vorticidad en la línea central es exactamente lo mismo.

	Número de celdas	Número de torbellinos iniciales
Malla 1	2400	3
Malla 2	4800	7
Malla 3	9600	11
Malla 4	19200	12

Cuadro 2: Estudio de convergencia simulación con $Re_1 = 5 \cdot 10^4$ y $Re_2 = 1 \cdot 10^5$

Hay que aclarar que en las simulaciones llevadas a cabo con diferentes fluidos las variaciones iniciales de vorticidad no provocan unos vórtices tan perfectos como los que se formaban en las simulaciones con un solo fluido. Es decir, tienen una forma menos redonda y más alargada, debido a las diferencias de densidad y viscosidad de los fluidos. Por este motivo se ha preferido mostrar las gráficas de las perturbaciones en vez de los campos de vorticidad 2D (cosa que sí se hizo en la subsección anterior) en los que no podría apreciarse con claridad el número de vórtices. Para obtener las gráficas de las perturbaciones iniciales se ha calculado el valor de la vorticidad en la línea central en 160 puntos equidistantes (recuérdese que en la dirección “x” la malla se ha dividido en 160 celdas con el mismo tamaño), se ha hallado el valor medio de esta variable y se le ha restado dicho valor medio a la vorticidad existente en cada punto. Por último se han representado estos valores de la vorticidad correspondiente a la perturbación en función del lugar en el eje “x” en el que se haya obtenido el valor de la vorticidad. Obviamente esto se ha realizado en el instante en el que aparecen los primeros vórtices.

Es conveniente resaltar que en todo este trabajo se van a usar variables adimensionales y debido a ello en las gráficas obtenidas no aparece ninguna unidad. En el siguiente apartado se explica con todo lujo de detalles como se han definido dichas variables (las usadas en las gráficas que aquí se muestran se definen concretamente en las ecuaciones (48) y (49)).

Como se ha mostrado en la tabla anterior y como se puede observar comparando las figuras 15c y 15d, el número de vórtices iniciales en las mallas 3 y 4 no es el mismo pues en la malla 4 aparece inicialmente un vórtice más. Por lo tanto, los resultados obtenidos no son exáctamente los mismos pero la diferencia entre ellos es mínima siendo aún menos importante si se tiene en cuenta la enorme diferencia que existe entre los resultados de las simulaciones llevadas a cabo con las mallas 1 y 2 o con las mallas 2 y 3. Debido a esto se puede considerar que los resultados obtenidos con la malla 3 están prácticamente convergidos.

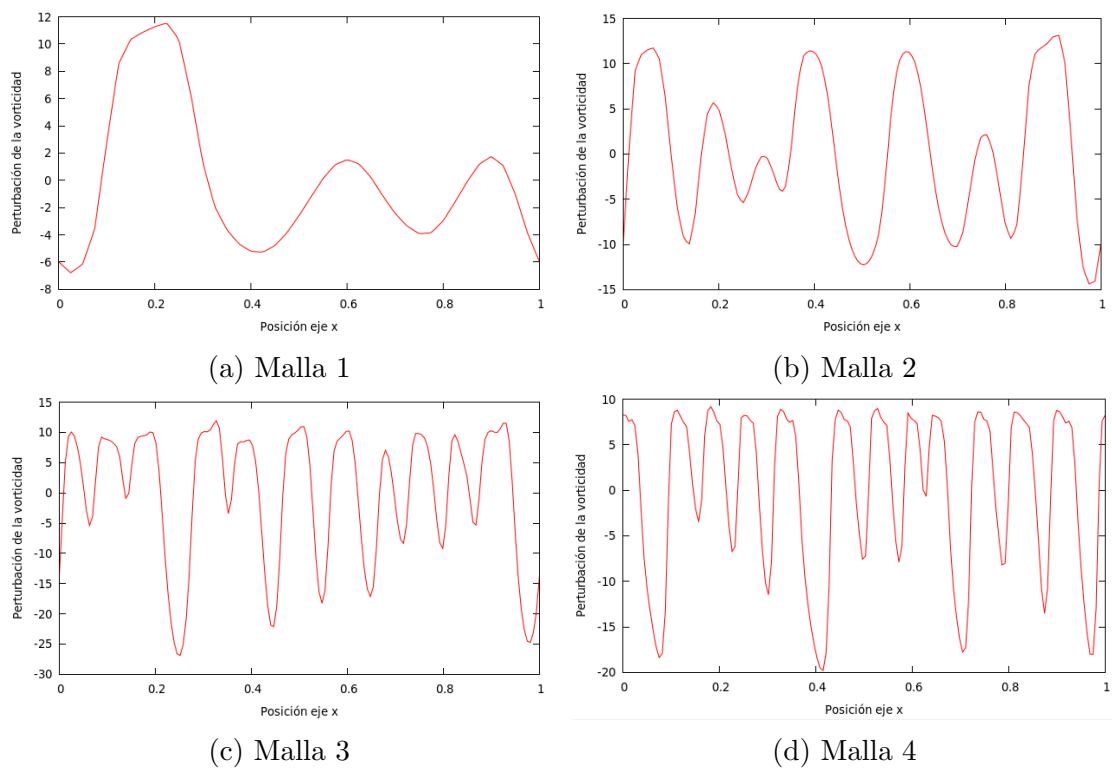


Figura 15: Perturbaciones iniciales de la vorticidad en la línea central

8. Explicación del fenómeno

En esta sección se va a describir de manera detallada lo que sucede a nivel físico en las simulaciones. Para ello se ha dividido el apartado en dos partes, una para las simulaciones llevadas a cabo con un fluido y otra para aquellas en las que se usan dos.

8.1. Un único fluido

Lo primero que se desea dejar claro es que todas las figuras y resultados que se van a mostrar en este subapartado serán de la simulación realizada con $Re = 1 \cdot 10^5$ y con la malla 3 (resultados previamente convergidos).

El primer instante en el que se pueden ver los resultados es en el $t = 0$, no obstante en este instante no se ha realizado ninguna simulación sino que solo aparecen los valores iniciales que se le ha dado a cada variable. Por lo tanto, aparece una velocidad horizontal de 0.5 m/s en la parte superior del dominio y de -0.5 m/s en la inferior y la velocidad vertical obviamente es nula en toda la región. El único cálculo que se realiza en este instante es el de la vorticidad usando la herramienta de postprocesado “vorticity”, como ya se dijo en el apartado 4, esta herramienta calcula el rotacional del vector de velocidad en cada celda. La vorticidad inicialmente es nula en todo el dominio excepto en la línea central donde solo tiene componente “z”, como no puede ser de otra forma pues estamos ante una simulación en 2D en el plano “xy”. Concretamente toma un valor constante en toda la línea central de -230.947, el origen de este valor es fácil de demostrar teniendo en cuenta que al hacer el rotacional la componente “z” de este quedaría:

$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \simeq \frac{\Delta u_y}{\Delta x} - \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \quad (44)$$

Los incrementos de “x” y de “y” no son otra cosa que las dimensiones de las celdas que están en la línea central del dominio, de forma que según la definición que se ha hecho de la malla: $\Delta x \simeq 0,00625$ y $\Delta y \simeq 0,002164996$ (se usan tantas cifras decimales porque al tratarse de valores tan pequeños éstas no son despreciables). Por otra parte Δu_x es la diferencia de velocidad horizontal entre las dos paredes verticales de la celda y Δu_y es la diferencia de velocidad vertical entre las paredes horizontales, de forma que inicialmente en la región central $\Delta u_x = 0,5$ y $\Delta u_y = 0$. Haciendo ahora los cálculos se obtiene exactamente el mismo resultado que devuelve la herramienta vorticity, como se puede observar en la siguiente ecuación:

$$\omega_z = \frac{0}{0,006} - \frac{0,5}{0,002164996} = -\frac{0,5}{0,002164996} = -230,9470 \quad (45)$$

En los cálculos anteriores puede parecer extraño que se usen tantas cifras decimales cuando luego el resultado final se da solo con cuatro decimales, pero es ésto lo que hace OpenFOAM. Por otra parte el símbolo negativo de la vorticidad es totalmente lógico. Recuértese que en la parte superior del dominio el flujo va hacia

la derecha (dirección positiva del eje “x”) y en la inferior va hacia la izquierda, de forma que las partículas tienden a girar en el centro del dominio en sentido horario. Teniendo en cuenta que el eje “y” va hacia arriba (tal y como se puede observar en la figura 7), un giro horario en el plano “xy” se corresponde con un vector negativo en el eje “z”, de ahí el signo de la vorticidad.

Analizando el instante 1 (primer cálculo) se observa que existen pequeños errores numéricos en la simulación. En la figura 16 se ha representado la componente vertical de la velocidad en el instante 1, dicha componente debería ser nula en todo el dominio sin embargo no es así. Además se observa como los errores de cálculo se dan especialmente en la línea central que separa a los dos flujos, en dicha línea los errores son del orden de 10^{-15} mientras que en el resto del dominio son del orden de 10^{-16} o 10^{-17} . En este instante la vorticidad que calcula el programa en la línea central es totalmente constante pero en realidad no debería ser así puesto que los pequeños Δu_y deberían hacer que ésta no fuese constante, el problema es que solo se usan cuatro cifras decimales (como ya se ha dicho anteriormente) y por lo tanto las pequeñas variaciones que introducen esos diminutos incrementos no tienen ninguna influencia en el resultado.

Lo que si se puede observar en el instante 1 es la disminución del valor medio de la vorticidad, cosa totalmente lógica pues debido al efecto de la velocidad el Δu_x disminuye. Hay que tener presente que en la región de contacto entre los dos flujos la viscosidad siempre va a disminuir el escalón de velocidad que existe entre los dos flujos. Además cuanto menor sea el número de Reynolds más capacidad va a tener la viscosidad para frenar los flujos en las regiones cercanas al centro. Debido a este efecto de la viscosidad, se puede adelantar que a lo largo de toda la simulación el valor medio de la vorticidad siempre va a disminuir pues aunque van a aparecer Δu_y no va a existir ningún segundo en el que la vorticidad sea superior a la del anterior instante.

Es necesario aclarar que el “solver” interFoam ofrece la posibilidad de establecer un δt que se ajuste automáticamente. Es decir, es el propio “solver” el que varía el δt para que el número de Courant nunca excede un valor determinado que previamente hay que indicarle. En todas las simulaciones realizadas en este trabajo con interFoam se ha usado este δt autoajutable y se ha establecido un número de Courant máximo de 1. Por otra parte, se ha decidido que los resultados siempre se muestren cada 0.01 segundos. De forma que el segundo 0.01 corresponde al instante 1 y el segundo 1 al instante 100.

Otro aspecto que hay que destacar es que a lo largo de todo el trabajo se van a usar siempre variables adimensionales (tal y como se adelantó en el apartado anterior) para poder realizar comparaciones objetivas entre las distintas simulaciones. Para identificar estas variables se usará una “comilla”, como se puede apreciar en las siguientes definiciones:

$$t' = \frac{t}{L/U_0} \quad (46)$$

$$u' = \frac{u}{U_0} \quad (47)$$

$$\Gamma' = \frac{\Gamma}{U_0 L} \quad (48)$$

$$x' = \frac{x}{L} \quad (49)$$

Obsérvese que en esta simulación el tiempo, la velocidad, la vorticidad y la posición en el eje “x” adimensional son exactamente iguales a las variables ordinarias puesto que el denominador de las tres ecuaciones es 1. Así que hasta que no se cambie U_0 o L hablar de variables ordinarias será exactamente lo mismo que hablar de dichas variables adimensionalizadas.

Continuando con el estudio de las simulaciones, se puede apreciar como a medida que pasa el tiempo los errores de cálculo de velocidad vertical en la línea central se van acumulando y realimentando. En la figura 17 se observa como se alternan las zonas de velocidad vertical positiva y negativa, además estas zonas son mucha más grandes que en el instante inicial (figura 16) y su valor también es mayor pues ahora es del orden de 10^{-7} .

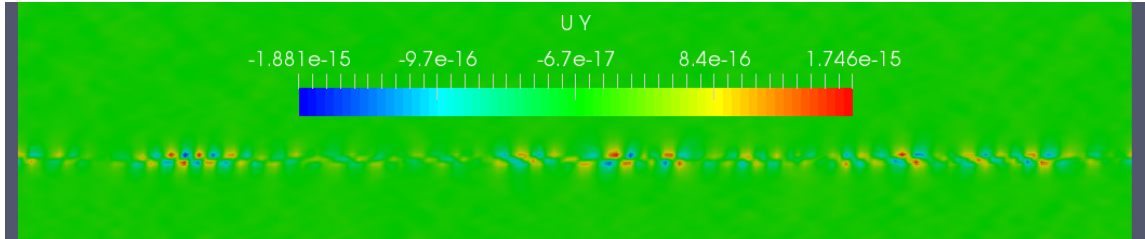


Figura 16: Velocidad vertical en la línea central en el segundo 0.01

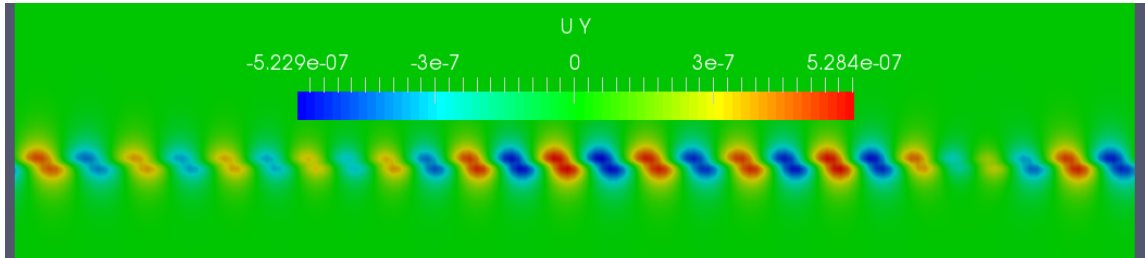


Figura 17: Velocidad vertical en la línea central en el segundo 1.1

Llegados a este punto y antes de continuar mostrando resultados es necesario aclarar las fases que se dan en el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Para ello se va a usar la figura 18. La línea roja que se representa en esta imagen es la interfase que existe entre los dos flujos. Inicialmente se observa como la interfase es totalmente recta y las velocidades verticales son totalmente inexistentes. Luego aparecen unas perturbaciones en forma de velocidad vertical que hacen que aparezcan las primeras “olas”, al tratarse de un sistema inestable estas perturbaciones comienzan a crecer. Obsérvese como la velocidad vertical es positiva en la parte convexa de la interfase y negativa en la cóncava, es decir, las zonas de velocidad positiva y negativa se van alternando lo que es un indicio inequívoco de la existencia de vórtices. Por último en las fases d y e se aprecia como llegado un momento las

crestas de las olas no solo crecen sino que comienzan a “enrollarse” y a adquirir una forma de “espiral”.

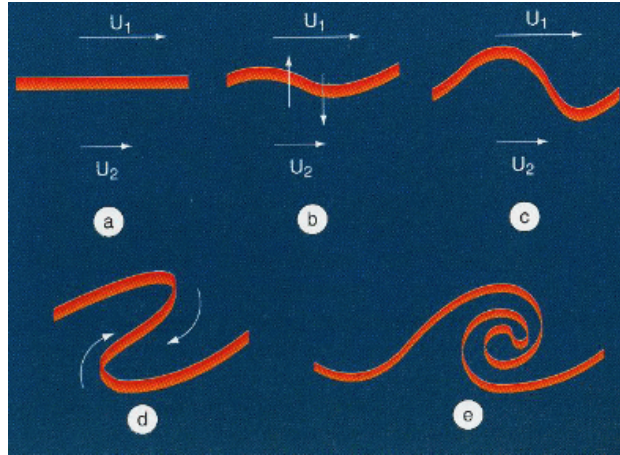


Figura 18: Fases del desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz [21]

Realmente existe un último paso que no está mostrado en la figura 18 que no es otro que la unión de vórtices. Téngase en cuenta que en la imagen anterior solo se representa un vórtice y por lo tanto es obvio que no se puede mostrar ese paso del que se está hablando. Esta última fase se produce una vez que los vórtices iniciales están lo suficientemente desarrollados, es decir, cuando ya se han formado las “espirales” y lo que sucede es que empiezan a rotar unos sobre otros en grupos de dos o tres hasta que sus centros se unen. Este proceso se repite en distintas ocasiones hasta que solo queda un único vórtice.

Mediante el estudio y observación de diversas simulaciones se ha llegado a la conclusión de que lo descrito en los párrafos anteriores no sucede hasta que ha pasado un tiempo suficiente para que las velocidades verticales hayan aumentado lo suficiente su valor en la zona central. Para la simulación concreta que se está analizando en este apartado se ha observado que hasta el segundo 1.6 no se produce ninguna variación en el valor de la variable α en toda la línea central, siendo su valor constante e igual a 0.5. Esto indica que ninguna partícula del flujo inferior a invadido el superior y viceversa, o lo que es lo mismo, indica que no se ha formado ninguna “ola”. Se llega por tanto a la conclusión de que en el tiempo comprendido entre el segundo 0.01 y el 1.1 lo único que se ha producido es una realimentación de los errores numéricos de los cálculos (como ya se avanzó anteriormente) pero no se está simulando aún la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Debido a lo explicado en el párrafo anterior, a partir de ahora se le llamará vórtices iniciales a aquellos con los que comiencen a aparecer variaciones de la variable α en la línea central. Es importante resaltar que la aparición de estos primeros vórtices indican que en ese preciso instante existe una perturbación de velocidad vertical (lo que conlleva una perturbación de vorticidad) lo suficientemente intensa como para desarrollar la inestabilidad. En la figura 19 se representa la perturbación inicial (segundo 160) de la vorticidad (la forma de obtener este tipo de gráficas se explicó en el apartado anterior).

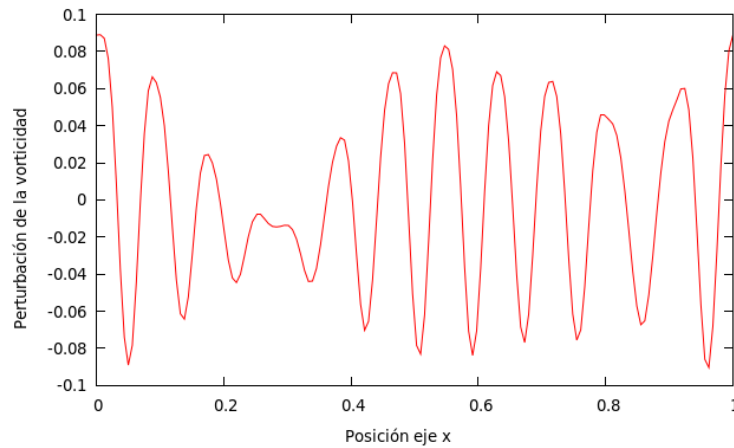


Figura 19: Perturbación inicial de la vorticidad a lo largo de la línea central

En la figura anterior se puede observar claramente como el número total de vórtices iniciales es 11, tal y como se adelantó cuando se realizó el estudio de convergencia. Obsérvese que los valores de la perturbación varían entre -0.08 y 0.08, valores muy pequeños si se tiene en cuenta que la vorticidad media en la línea central en este instante es de -65.4 unidades adimensionales.

A medida que pasa el tiempo esta perturbación inicial comienza a crecer, es decir, los valores de la perturbación dejan de ser tan pequeños en comparación con el valor medio de esa magnitud. Pasadas algunas décimas de segundo (en el instante 220) ya se observan los primeros vórtices en la interfaz gráfica tal y como se puede apreciar en la figura 20. Sin embargo como se aprecia en la figura 21 todavía no han comenzado a formarse las “espirales” de la que se habló anteriormente, es decir, el proceso que se desarrolla entre el instante 160 y el 220 correspondería al que se encuentra entre las representaciones b y c de la figura 18.

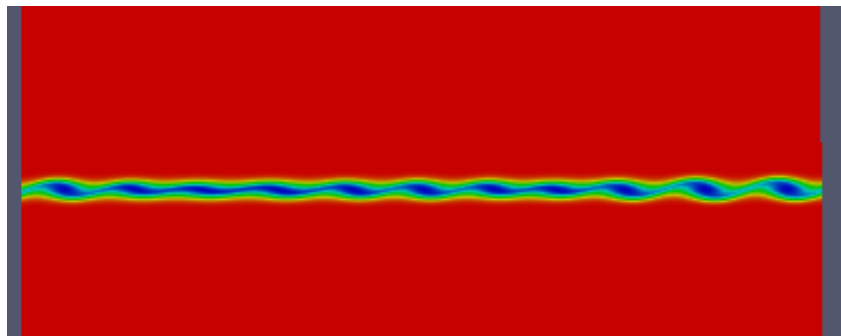


Figura 20: Componente “z” de la vorticidad en la línea central en el segundo 2.2

A partir del segundo 220, los vórtices además de crecer comienzan a formar las “espirales”, obsérvese la imagen 22. Es decir comenzaría la fase comprendida entre las representaciones c y e de la figura 18. Si el lector hace un pequeño esfuerzo visual podrá observar como en la figura 22 existen 11 “espirales” que se corresponden con los 11 vórtices iniciales del instante 160.

Aunque en este apartado se están mostrando los resultados de simulaciones con

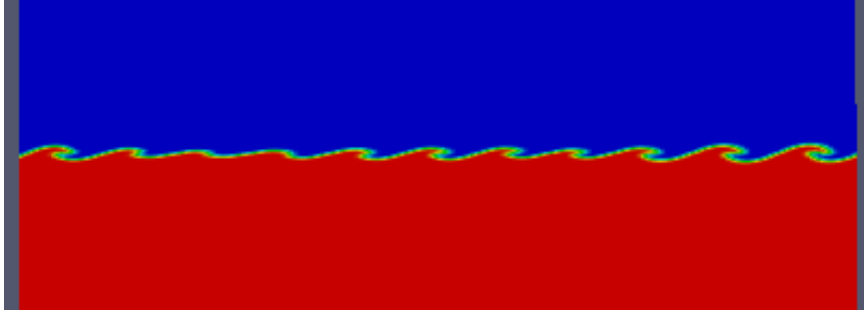


Figura 21: Variable alfa en la línea central en el segundo 2.2

un único fluido, usando el método VOF (del que se habló en el apartado 4) se puede diferenciar en cualquier instante el flujo que estaba inicialmente en la parte inferior del que estaba en la superior. Es decir, se puede analizar como se produce la mezcla de los dos flujos iniciales. Hay que imaginarse que al flujo que se encontraba inicialmente en el dominio inferior se le ha inyectado una tinta roja y al superior una azul de forma que según el color que tenga cada punto del dominio se sabrá si hay más fluido del que inicialmente se encontraba abajo o del que estaba arriba (junto a figura 22 se aprecia una leyenda con la escala de colores). Por este motivo se pueden apreciar la formación de las “espirales” que no son más que partículas del flujo inferior rotando alrededor de un punto central e invadiendo el espacio que inicialmente solo ocupaban partículas del flujo superior y viceversa.

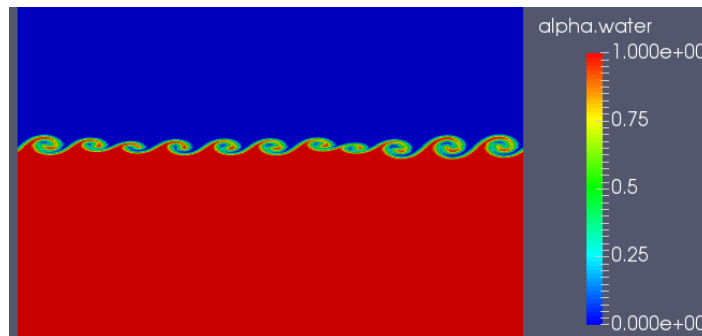


Figura 22: Variable alfa en la línea central en el segundo 2.38

Hay que resaltar que las partículas azules también realizan el movimiento rotatorio sobre el centro del dominio, si el lector no apreciase las “espirales” azules tan solo tendrá que rotar la imagen 180 grados para poder observarlas y así comprobar que el fenómeno es totalmente simétrico.

A partir del segundo 2.38 los vórtices además de aumentar de tamaño y provocar la rotación de multitud de partículas, empiezan a rotar unos sobre otros y se van uniendo en grupos de dos o tres, este fenómeno se puede observar en la figura 23. En dicha imagen se aprecia como en el instante 267 ya solo hay 9 vórtices, si el lector hace un nuevo esfuerzo visual podrá comprobar que el segundo de los vórtices (empezando a contar por la izquierda) es una unión de dos de los vórtices iniciales. El vórtice número 6 también se ha formado con dos de los iniciales pero la unión se ha producido en el instante 251 y en esta imagen ya aparecen totalmente unificados.

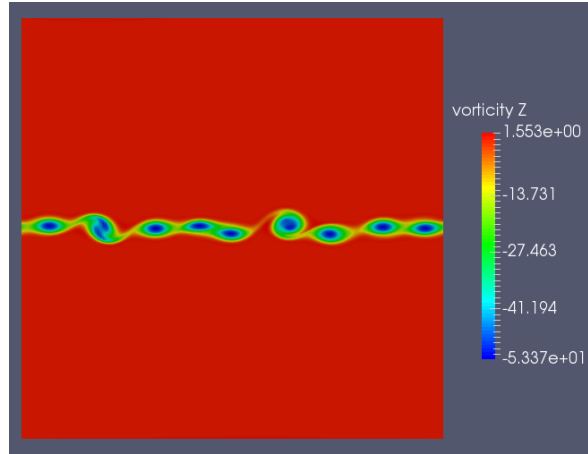


Figura 23: Componente “z” de la vorticidad en el instante 267

Como no puede ser de otra forma en las inmediaciones de los vórtices se produce una aceleración de las partículas, de forma que en estas zonas, la velocidad es mayor que en el resto del dominio. Tanto es así, que la velocidad en valor absoluto alrededor de los vórtices pasado algunos segundos es superior a la inicial. Prueba de ello es la figura 24, donde se observa como se alcanzan velocidades de hasta 0.7 unidades adimensionales cuando la velocidad de los dos flujos iniciales era de 0.5.

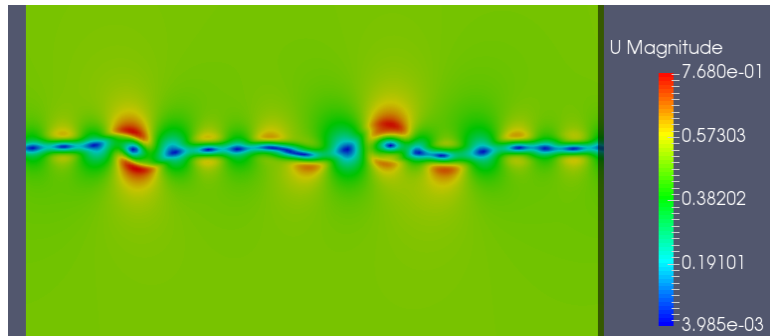


Figura 24: Velocidad en valor absoluto en el instante 267

En el mosaico 25 se muestra una serie de capturas en las que se puede apreciar las sucesivas uniones de los vórtices hasta que solo queda uno. Es necesario resaltar que a medida que van quedando menos vórtices a estos les cuesta más trabajo unirse entre sí y es necesario que pase una mayor cantidad de tiempo para que se junten. Obsérvese como entre la figura 25a y la 25c solo transcurre 0.5 segundos y se pasa prácticamente de 8 a 4 vórtices, mientras que entre las figuras 25d y 25f transcurren casi 5 segundos tiempo en el que se pasa de 4 a 1 vórtice. Este aumento de tiempo es lógico pues cuanto menor es el número de vórtices mayor es la distancia que existe entre los vórtices (lo que implica que las distancias que recorren los vórtices en las rotaciones que hacen unos sobre otros son mayores) y menor es la intensidad de estos debido a que los flujos se van frenando por la acción de la fricción.

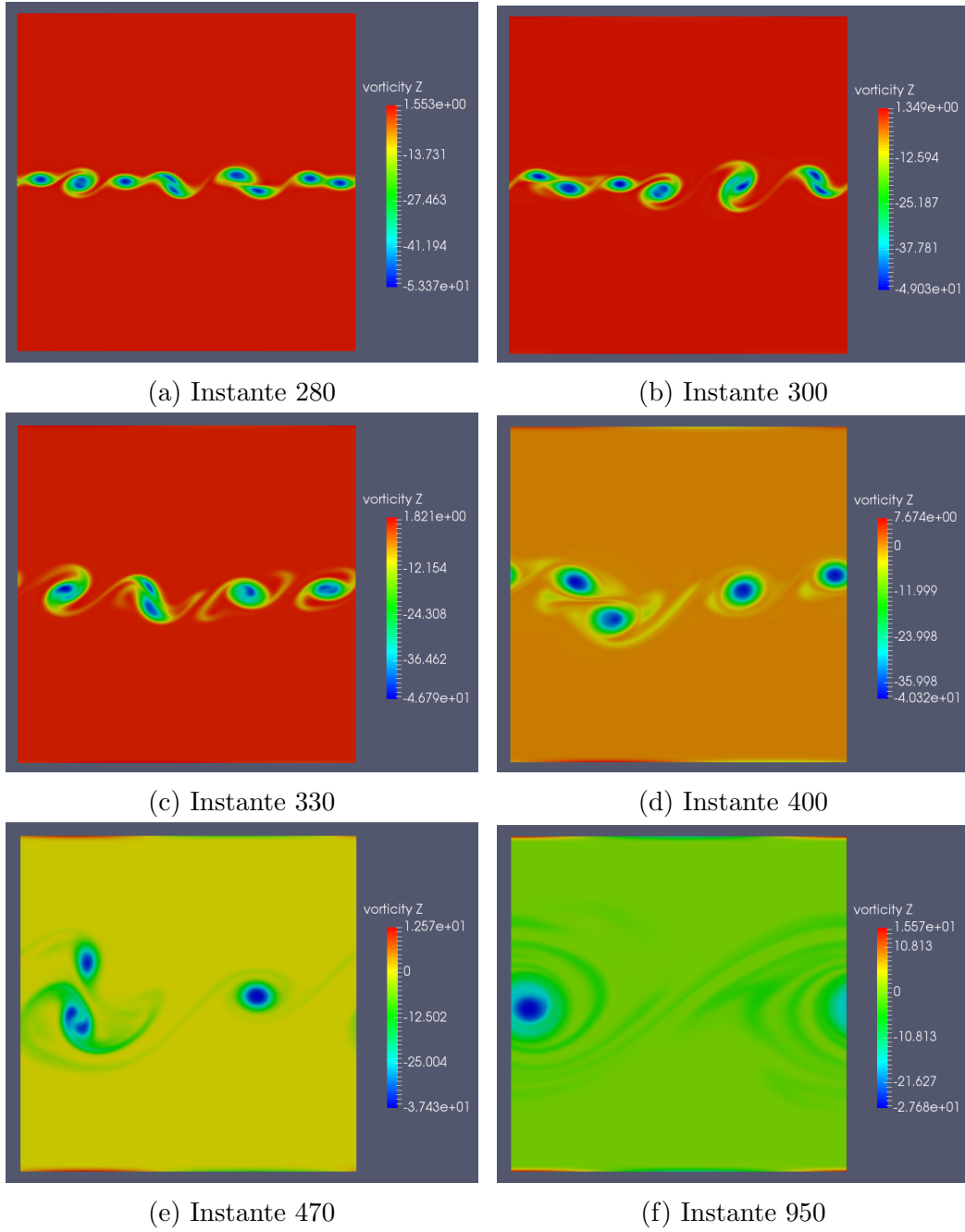


Figura 25: Capturas de las uniones entre vórtices

8.2. Dos fluidos

En líneas generales lo que se produce en las simulaciones realizadas con dos fluidos es lo mismo que se ha explicado en el subapartado anterior salvando algunos aspectos que son los que se van a resaltar a continuación. Los figuras y resultados que se van a mostrar en este subapartado van a ser todos de la simulación que se validó para dos fluidos en el apartado anterior y por lo tanto los números adimensionales tomarán los siguientes valores: $Re_1 = 5 \cdot 10^3$, $Re_2 = 1 \cdot 10^5$, $1/Fr = 0$, $1/We = 0$ y $\rho_1/\rho_2 = 10$

La primera diferencia respecto a las simulaciones en las que solo interviene un fluido es que ahora a pesar de tener los dos flujos la misma velocidad en valor absoluto (0.5 y -0.5) en la línea intermedia existe desde el instante 1 una velocidad horizontal. Hay que recordar que el instante 1 es el primer tiempo en el que se realizan cálculos, no confundir con el instante 0 donde la velocidad horizontal en la línea central si es nula por pura definición de las condiciones iniciales. El valor concreto que toma la velocidad horizontal en la línea central en el instante 1 es - 0.45, valor muy parecido al inicial del flujo inferior. Esto es así debido única y exclusivamente a la diferencia de densidades existente entre los dos flujos, como el inferior tiene una densidad 10 veces mayor a la del superior la fuerza inercial que tiene éste también es mayor. Esto implica que ahora la inestabilidad no se desarrolle de manera estática como sí sucedía en las simulaciones realizadas con un único fluido y con las mismas velocidades en valor absoluto. Es decir, ahora los vórtices iniciales antes de comenzar a rotar unos sobre otros también están en movimiento aunque solo sea una translación horizontal. Sin embargo hay que aclarar que la velocidad con la que se mueven los vórtices no es igual a la existente en la línea central puesto que ahora el centro de los vórtices está un poco desplazado hacia arriba, en el caso que aquí se analiza está desplazado dos celdas (lo que implica aproximadamente 0.004 unidades adimensionales), así que la velocidad es algo menor en valor absoluto pero sigue siendo negativa, es decir llevan la dirección del flujo inferior que es el más denso.

El efecto de la viscosidad ante un salto de velocidad como el que se produce en la línea central de la malla (0.5 en las celdas que están justo por encima de esta línea y -0.5 en las que están por debajo) es siempre el de suavizar el “escalón”. Es decir, la viscosidad hace que en las celdas que están alrededor de la línea central los flujos se frenen y tomen valores de velocidad horizontal entre 0 y 0.5 o entre 0 y -0.5. En los casos en los que solo había un fluido, la zona central en la que se frenaban los flujos se extendía de manera simétrica alrededor de la línea central, tal y como se puede observar en la figura 26a (la línea negra que aparece en las dos capturas es la línea central de la malla). Sin embargo, como ya se adelantó en el párrafo anterior, cuando los fluidos son distintos la región donde el fluido se frena se extiende más hacia la parte donde se encuentra el fluido de menor densidad como se puede observar en la figura 26b, donde la densidad del fluido inferior es 10 veces mayor a la del superior. Hay que aclarar que cuanto mayor sea la viscosidad de cualquiera de los fluidos (lo que implica menor Reynolds) mayor va a ser el efecto de las fuerzas viscosas en ese fluido y más rápido va a crecer la región de flujo frenado en la parte correspondiente (esto se va a demostrar en el apartado 9).

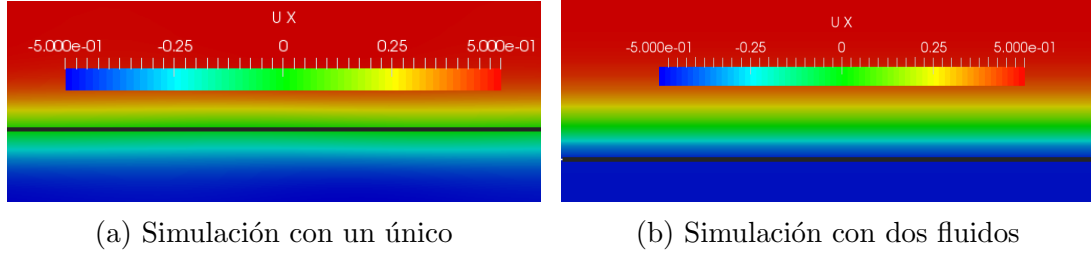


Figura 26: Velocidad horizontal en regiones cercanas a la línea central

La siguiente de las diferencias se da cuando se deberían comenzar a formar las “espirales”. Lo que ahora sucede es que las partículas del flujo inferior (mayor densidad) llegado un momento se desprenden y dejan de rotar alrededor de los vórtices tal y como se puede observar en la figura 27. Además debido a la ausencia de gravedad estas partículas que se desprenden son fácilmente arrastradas por el flujo superior tomando trayectorias totalmente impredecibles. Por lo tanto, a partir de ese momento los resultados no pueden considerarse correctos ya que se necesitaría una malla que fuera capaz de capturar la escala de estos nuevos fenómenos que aparecen.

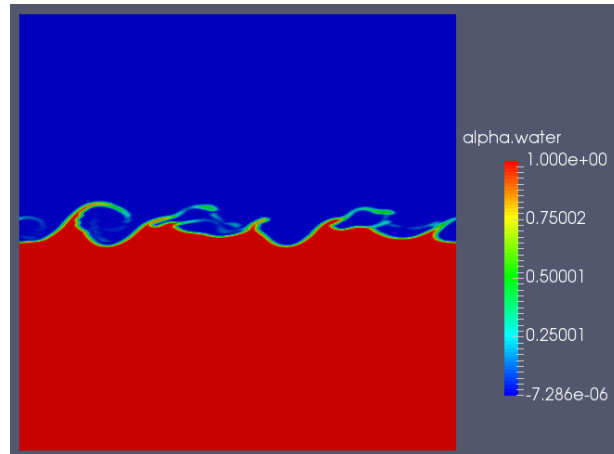


Figura 27: Variable α en el segundo 3.5

9. Estudio influencia del número de Reynolds

En este apartado se va a mostrar la influencia del número de Reynolds sobre la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. En apartados anteriores ya se han comentado algunos aspectos sobre el papel fundamental del número de Reynolds en esta inestabilidad pero es en esta sección donde se van a analizar más en profundidad estos aspectos.

Lo primero que hay que recordar es que en caso de tener un único fluido solo influyen dos números adimensionales en el problema, el número de Reynolds y el de Froude. No obstante como se explicará en el apartado 10 la gravedad no influye en caso de tener un único fluido. Por lo tanto la inestabilidad solo depende del número de Reynolds de ahí que su estudio sea tan importante.

9.1. Un único fluido

En este subapartado se mostrarán los resultados obtenidos en las simulaciones llevadas a cabo con un único fluido.

En la tabla 3 se muestra el número de vórtices que aparecen inicialmente, su intensidad y el tiempo que tarda en aparecer en la simulación (se han usado variables adimensionales como se adelantó en el capítulo anterior). En esta tabla se observa claramente como a medida que disminuye el número de Reynolds el número de vórtices que aparecen es menor. O lo que es lo mismo, el número de torbellinos iniciales aumenta cuanto mayor sea la diferencia entre la velocidad del flujo superior e inferior (en valor absoluto) y disminuye cuanto mayor sea la viscosidad.

Reynolds	Vórtices iniciales	Vorticidad máximas	Tiempo
$1 \cdot 10^6$	23	-210	1.09
$1 \cdot 10^5$	11	-57	2.38
$7,5 \cdot 10^4$	8	-47	2.76
$5 \cdot 10^4$	6	-33	3.8
$2,5 \cdot 10^4$	3	-16	7.8
$1,75 \cdot 10^4$	2	-11	11.5
$1 \cdot 10^4$	1	-6.4	21.5

Cuadro 3: Resultados para distintos números de Reynolds con un solo fluido

Por otra parte cuanto menor sea el número de Reynolds mayor es el tamaño de los vórtices iniciales como se puede observar en el mosaico de imágenes 28.

Estos resultados son bastante lógicos puesto que a medida que aumenta el número de Reynolds también se incrementa el dominio de las fuerzas inerciales frente a las viscosas. Es decir, al aumentar el número de Reynolds se necesitarán fuerzas inerciales menores para hacer que partículas del flujo inferior pasen a la parte superior del dominio o viceversa. O dicho de otra forma, al aumentar el número de Reynolds la viscosidad es incapaz de “matar” las pequeñas perturbaciones que a otros números de Reynolds inferiores si sería capaz de disipar.

La explicación del aumento del tamaño de los vórtices iniciales al disminuir el número de Reynolds es básicamente la misma que se ha dado en el párrafo anterior. A medida que disminuye el número de Reynolds las perturbaciones necesarias para que se desarrolle la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz deben ser mayores de ahí que los torbellinos a pequeños números de Reynolds tengan mayores dimensiones.

Como ya se dijo en el apartado 4, el uso de la condición de periodicidad limita el tamaño del fenómeno estudiado. Es decir, el número de vórtices que van a aparecer va a estar limitado por la longitud L de la malla, de forma que si la distancia entre el centro de los torbellinos iniciales es $L/2$ solo se observarán dos vórtices y si la distancia entre éstos es $L/8$ pues se observarán 8. Esta distancia media (los torbellinos no están exactamente a la misma longitud unos de otros) existente entre los vórtices iniciales es la longitud de onda de la perturbación inicial que provoca el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Por lo tanto cuanto mayor sea el número de Reynolds menor es la longitud de onda de las perturbaciones que provocan la aparición de la inestabilidad.

En la tabla 3 también se observa como a medida que disminuye el número de Reynolds el tiempo que tardan en formarse los primeros vórtices aumenta. Hay que recordar que en estas simulaciones no se ha introducido una perturbación manualmente sino que se ha dejado que los errores numéricos en el cálculo de la velocidad en la línea central sean los que creen las perturbaciones. Estos errores numéricos se acumulan y se realimentan, de forma que cuanto más tiempo pase mayores serán. Esto explica el aumento del tiempo a medida que se disminuye Reynolds. Es decir, cuanto menor sea el número de Reynolds mayor será el tiempo que hay que darle a la simulación para que los errores en la velocidad vertical en la línea central sean lo suficientemente grandes como para provocar una perturbación en la vorticidad que desarrolle la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Hay que aclarar que la viscosidad es un parámetro que se opone al crecimiento de la perturbación ya que se trata de una inestabilidad no viscosa.

Por último se observa como la intensidad máxima de la vorticidad disminuye a medida que disminuye el número de Reynolds cosa que en principio puede parecer que contradiga a lo explicado en este apartado. Sin embargo hay que tener en cuenta que no solo disminuye la vorticidad máxima en la línea central sino también el valor medio de ésta. Esta disminución de intensidad general se debe a que al disminuir el número de Reynolds el tiempo necesario para que se desarrolle la inestabilidad aumenta considerablemente (tal y como se ha explicado en el párrafo anterior) y por lo tanto cuando ésta se da las partículas tienen mucha menos velocidad en la línea central debido a la acción de la fricción cuyo efecto es además mayor a medida que disminuye el número de Reynolds.

Por otra parte, para un Reynolds de $5 \cdot 10^3$ se ha comprobado que no se produce la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Lo que sucede es que a tan bajos números de Reynolds la viscosidad tiene un gran dominio sobre las fuerzas inerciales, de forma que los flujos se frenan muy rápidamente en la zona central que es donde a Reynolds superiores se desarrolla la inestabilidad. En la figura 29 se puede apreciar como en el instante 2 la viscosidad ha conseguido frenar prácticamente toda la región central impidiéndose de esta forma que se produzcan errores numéricos en el cálculo de la

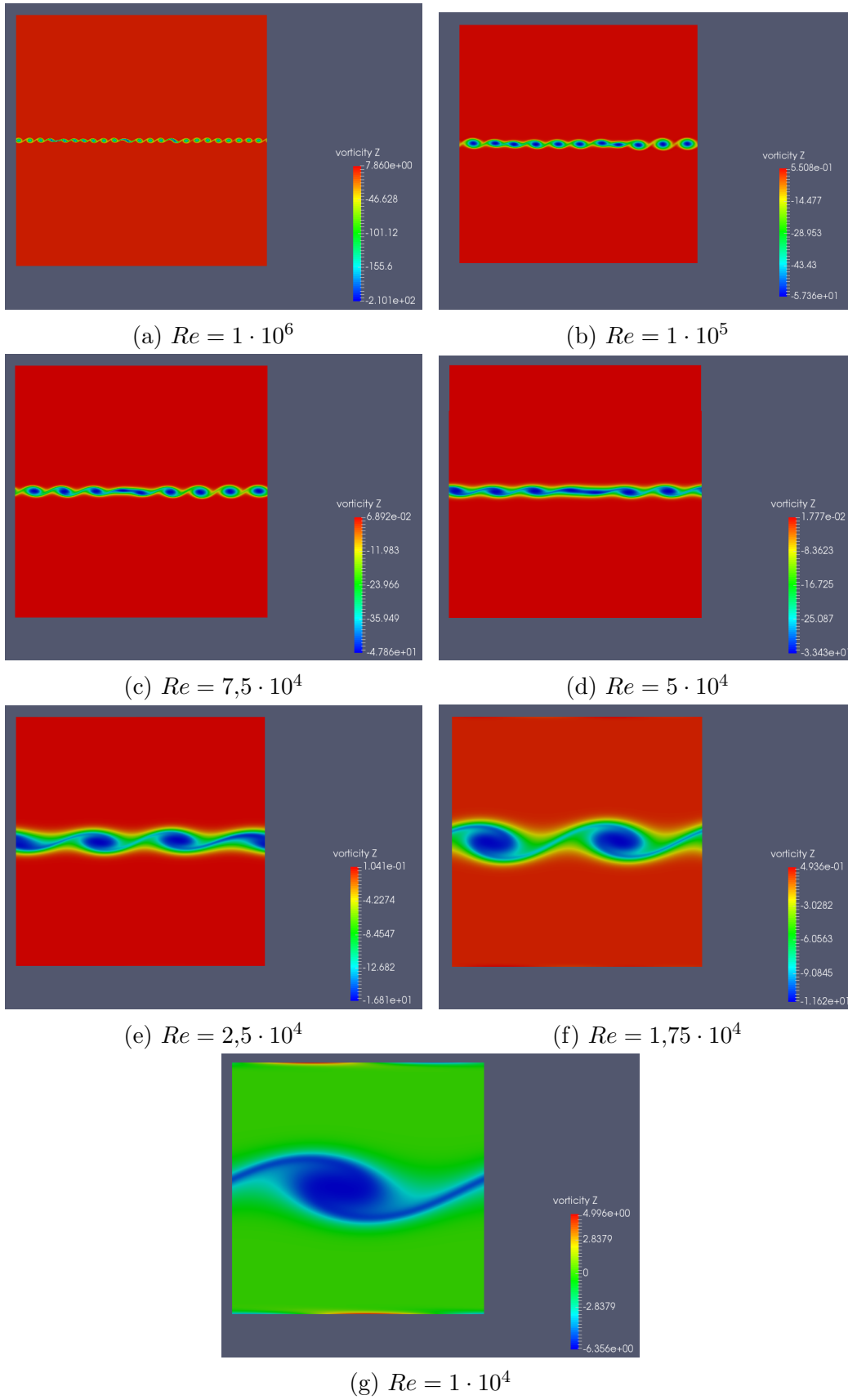


Figura 28: Tamaño de los vórtices iniciales

velocidad vertical que desarrollen la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. A partir de este instante la región en la que el fluido está prácticamente estático sigue aumentando hasta que llega un momento en que la velocidad de las paredes superiores hace que ésta no siga creciendo.

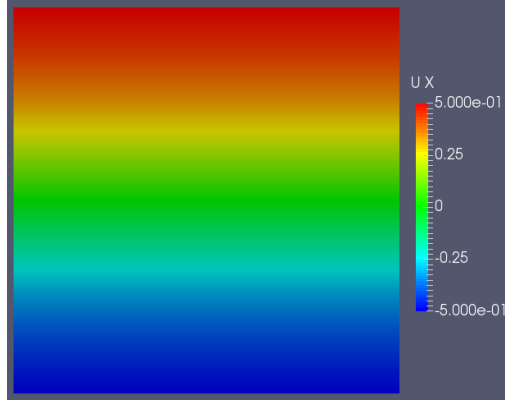


Figura 29: Velocidad horizontal en el instante 2 a $Re = 5 \cdot 10^3$

Como el lector habrá podido apreciar, en este apartado se han mostrado los resultados obtenidos para $Re = 1 \cdot 10^6$, Reynolds para el cuál se dijo en la sección 7 que no se había podido converger los resultados. Lo que se ha hecho es usar una malla (malla 5) con mayor resolución que la 4 que es la que se ha usado para el resto de simulaciones y cuyos resultados fueron convergidos para números de Reynolds menores a $1 \cdot 10^5$. Como ya se dijo anteriormente lo ideal sería haber usado una malla 6 más fina que la malla 5 y comprobar que la 5 da unos resultados adecuados pero esto es imposible teniendo en cuenta los recursos informáticos de los que se dispone.

¿Entonces por qué se han mostrado los resultados si éstos no están convergidos? La respuesta a esta pregunta es muy simple, si la malla 6 diese unos resultados distintos a la 5, lo que se obtendría sería un mayor número de vórtices iniciales y un menor tamaño de éstos como ya se ha explicado anteriormente en el apartado 7. Así que la diferencia entre el tamaño y el número de vórtices iniciales de las simulaciones con Reynolds $1 \cdot 10^5$ y $1 \cdot 10^6$ solo puede aumentar, ratificándose aún más si cabe las conclusiones a las que se ha llegado en este apartado.

Por último se desea comentar que los resultados mostrados en este apartado coinciden con los obtenidos por Fakhari y Lee [8] quiénes en su estudio comprobaron que el aumento del número de Reynolds desestabiliza el sistema y provoca el desarrollo de la inestabilidad de una manera más rápida y caótica.

9.2. Dos fluidos

En este subapartado se va a volver a estudiar la influencia del número de Reynolds pero en este caso sobre las simulaciones llevadas a cabo con dos fluidos. Como ya se ha dicho anteriormente para estos estudios existen dos números de Reynolds, se llamará Re_1 al del flujo inferior y Re_2 al del superior. También hay que aclarar

que en toda esta subsección se mantendrá la gravedad y la tensión superficial nulas y además se mantendrá constante la relación $\rho_1/\rho_2 = 10$.

El primero de los estudios que se ha realizado consiste en variar el número de Reynolds del flujo inferior manteniendo el superior constante e igual a $Re_2 = 1 \cdot 10^5$. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4. Analizando estas tablas se aprecia que la influencia del número de Reynolds es la misma que en las simulaciones realizadas con un único fluido, es decir, al aumentar el número de Reynolds la inestabilidad tarda menos tiempo en aparecer y el número de vórtices iniciales aumenta. Las conclusiones a las que se llegan son las mismas que se escribieron en el apartado anterior y por tanto carece de sentido volver a repetirlas.

Reynolds 1	Vórtices iniciales	Vorticidad máximas	Tiempo
$1 \cdot 10^4$	15	-151	1.8
$5 \cdot 10^3$	11	-122	2.8
$2,5 \cdot 10^3$	8	-94	5
$1 \cdot 10^3$	4	-84	11.4

Cuadro 4: Resultados para distintos números de Reynolds con dos fluidos

Hay que aclarar que los resultados de la simulación para $Re_1 = 1 \cdot 10^4$ con $Re_2 = 1 \cdot 10^5$ no están convergidos, no obstante se han mostrado exactamente por el mismo motivo que se mostraron los de la simulación realizada con $Re = 1 \cdot 10^6$ (leer el subapartado anterior si no se recuerda la explicación).

El siguiente estudio consistió en realizar una simulación idéntica a la segunda que se puede observar en la tabla 4 ($Re_1 = 5 \cdot 10^3$) pero ahora se introdujo un $Re_2 = 5 \cdot 10^3$ en vez del Re_2 que se usó en las simulaciones anteriores. Como era de esperar se obtuvo un menor número de vórtices y el tiempo que tardaron en aparecer fue muy superior al de la simulación realizada con $Re_2 = 1 \cdot 10^5$. Concretamente se generaron 4 vórtices inicialmente y tardaron 10 unidades de tiempo adimensional en aparecer.

Con la simulación anterior se comprueba además que al disminuir el número de Reynolds en alguno de los flujos el efecto de la viscosidad es mayor y por tanto ese flujo en la parte central se frena con mayor rapidez. Esto ya se adelantó en el subapartado 8.2 pero aquí se va a demostrar mediante la comparación de las figuras 30a y 30b. En estas imágenes se puede observar claramente como al disminuir el número de Reynolds del flujo superior (Re_2) éste se frena mucho más. Téngase presente que la línea negra que aparece en ambas imágenes es la línea central (a pesar de que no están a la misma altura) por lo tanto queda claro que la diferencia entre una simulación y otra reside en el comportamiento del flujo superior.

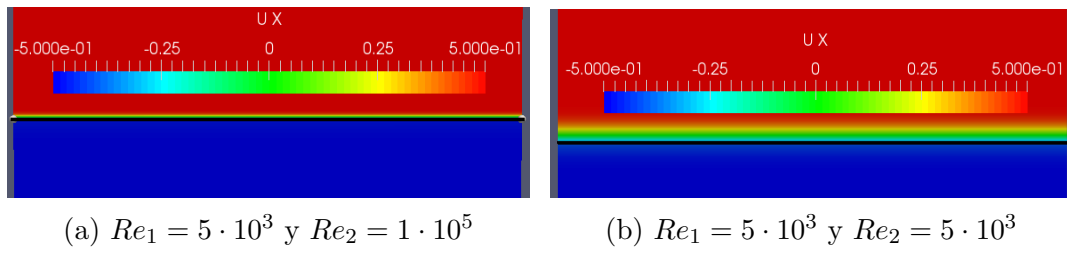


Figura 30: Velocidad horizontal el instante 150 en la zona central

10. Estudio influencia de la gravedad

En esta sección se va a analizar el efecto que tiene la fuerza de gravedad sobre la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Este estudio se hizo tanto para las simulaciones en las que solo hay un fluido como para aquellas en las que hay dos.

10.1. Un único fluido

Se ha comprobado que cuando solo hay un fluido la gravedad no afecta a la simulación. Para ello se han llevado a cabo dos simulaciones, en una de ellas se introdujo una gravedad nula y en la otra un valor de -9.81 m/s^2 . Este valor de la gravedad implica un cambio en el inverso del número de Froude que se va a calcular a continuación:

$$\frac{1}{Fr} = \frac{Lg}{U_0^2} = \frac{1 \cdot 9,8}{1^2} = 9,8 \quad (50)$$

Sin embargo en ambas simulaciones se obtuvieron exactamente los mismos resultados. Esto era lo que se esperaba, puesto que al tener el fluido la misma densidad en todo el dominio la gravedad lo único que hace es aplicar la misma fuerza (en módulo y dirección) sobre todas las partículas lo cual no cambia nada el comportamiento de éstas.

10.2. Dos fluidos

En el caso de que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se desarrolle entre dos fluidos con distintas densidades, la gravedad si tienen bastante efecto. Para estudiar este efecto se ha repetido la simulación con $Re_1 = 2,5 \cdot 10^3$, $Re_2 = 5 \cdot 10^5$, $\rho_1/\rho_2 = 10$ y sin tensión superficial pero ahora si se ha introducido gravedad, de forma que al igual que en el subapartado anterior $1/Fr = 9,8$.

Lo primero que se observa es que en la simulación realizada con gravedad aparecen unos errores iniciales en el cálculo de la velocidad vertical mucho mayores. De forma que la inestabilidad se desarrolla mucho antes en el tiempo, sin embargo, esto es un aspecto puramente numérico y no tiene ninguna repercusión en las conclusiones físicas del efecto de la gravedad.

A pesar de que la inestabilidad se desarrolla antes el número de vórtices iniciales que aparecen es el mismo (8), siendo este el resultado que se esperaba. En la figura 31 se muestra una captura de la variable α en el instante en el que aparecen los primeros vórtices.

No obstante a partir de este instante la gravedad toma un papel principal en el desarrollo de la inestabilidad pues evita que las partículas del flujo inferior roten alrededor del centro de los vórtices e invadan el flujo superior tratando de formar las “espirales” de las que tanto se ha hablado en este trabajo. Si se recuerda la figura 18, lo que la gravedad hace es evitar que se llegue a las fases d y e.

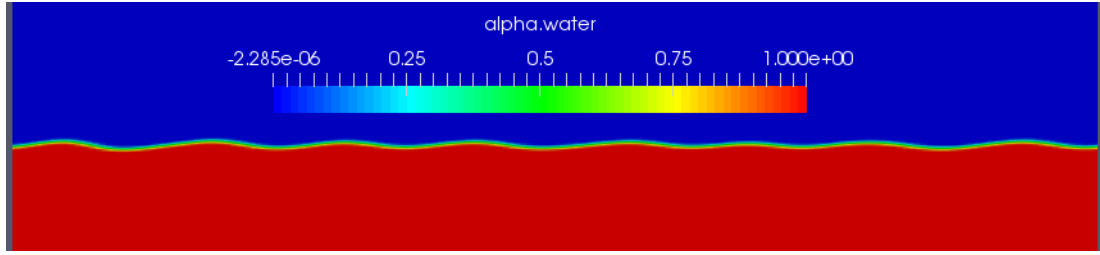


Figura 31: Variable α en el instante en el que se forman los vórtices iniciales

Tras formarse los vórtices iniciales estos empiezan a aumentar de tamaño y comienzan a unirse unos con otros, tal y como sucede en todas las simulaciones realizadas, pero en ningún momento consiguen tener la intensidad suficiente para superar el efecto de la gravedad y conseguir formar “olas” más grandes de las que se pueden observar en la figura 31. Hay que dejar claro que aquí se están comentando los resultados de un caso concreto, bajo otras condiciones probablemente se consigan vórtices con intensidades capaces de superar sin problemas la fuerza de la gravedad.

Que los vórtices no consigan grandes rotaciones de las partículas del flujo inferior alrededor del centro de sus centros no implica que la inestabilidad deje de desarrollarse. En la figura 32 se muestra como en el instante 450 ya solo quedan 5 vórtices y además se puede apreciar como el tercero y el cuarto se están uniendo.

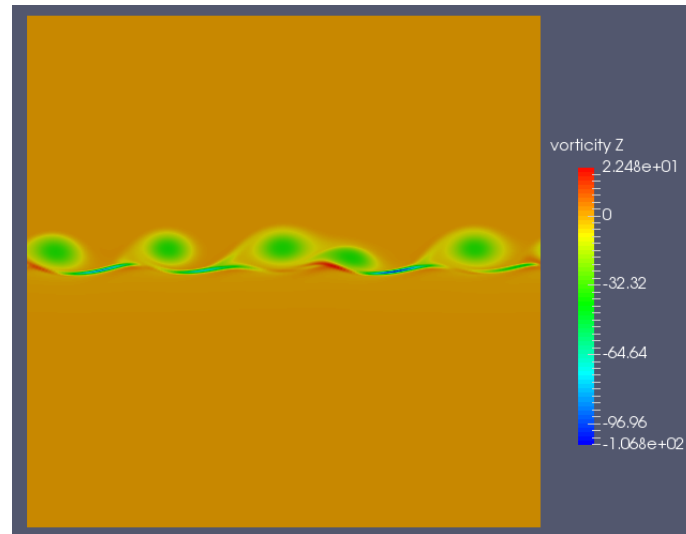


Figura 32: Campo de vorticidad en el instante 450

Como no puede ser de otra forma las uniones de vórtices también se pueden observar mediante el estudio de la variable α . En la imagen 33 se observa como en el instante 450 solo existen 5 “olas”.

Tras analizar todos estos resultados se llega a la conclusión de que la gravedad tiene un efecto estabilizador, puesto que evita que los vórtices provoquen una mezcla de los fluidos. Sin embargo, no tiene la capacidad de evitar la aparición ni el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz pues como se ha mostrado anteriormente se crea el mismo número de vórtices y además se unen entre ellos.

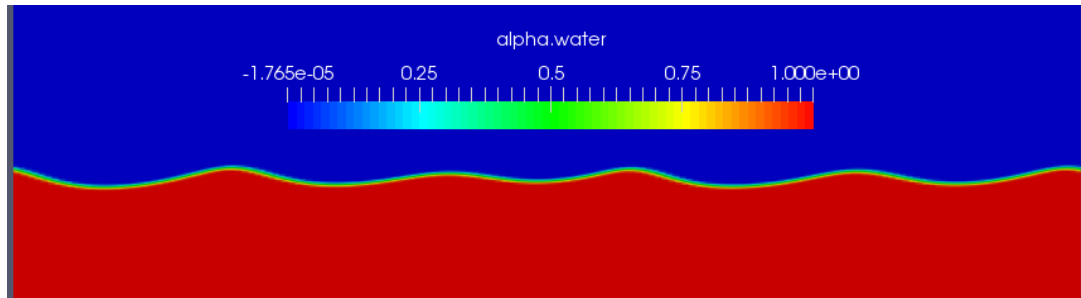


Figura 33: Campo de vorticidad en el instante 450

En este caso no se ha encontrado ningún estudio en el que se analice el efecto de la gravedad sobre la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. No obstante en diferentes artículos como el de Lee y Kim [6] se comenta que la gravedad tiene siempre un efecto estabilizador, coincidiendo de esta forma con el resultado al que se ha llegado en este apartado.

11. Estudio influencia relación de densidades

Este estudio a diferencia de los anteriores solo tiene sentido para las simulaciones realizadas con dos fluidos. Lo que se va a analizar es el efecto que tiene la diferencia de densidades entre los dos flujos. Como viene siendo habitual en este trabajo, se va a hablar de variables adimensionales y por este motivo se va a usar el número adimensional π_ρ que abarca perfectamente las diferencias entre densidades.

$$\pi_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (51)$$

La idea de este estudio es modificar únicamente el conjunto adimensional que se acaba de mostrar sin que esto afecte al resto de números adimensionales y de esta forma poder analizar exclusivamente la influencia de π_ρ sobre la aparición y desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Para conseguir esto se ha variado únicamente la densidad del flujo inferior (fluido 1) y se ha dejado constante la densidad del superior. No obstante si solo se realizase esta modificación se estaría variando también el número de Reynolds del flujo inferior por lo tanto hay que variar adicionalmente la viscosidad dinámica de éste para mantener Re_1 constante.

Es conveniente dejar claro que en todas las simulaciones que se van a llevar a cabo en este apartado se introducirá una gravedad y tensión superficial nula lo que implica $1/Fr = 0$ y $1/We = 0$ respectivamente.

En el primero de los estudios se van a introducir unos números de Reynolds $Re_1 = 1 \cdot 10^3$ y $Re_2 = 1 \cdot 10^5$ y se van a usar cuatro π_ρ distintos, cuyos valores serán 1, 5, 10 y 20. La simulación con $\pi_\rho = 10$ ya se llevó a cabo en el subapartado 9.2 por lo tanto solo se tendrán que realizar tres simulaciones.

En la tabla 5 se muestra para cada uno de los casos el número de vórtices iniciales y el tiempo que tardan en aparecer.

Relación de densidades π_ρ	Vórtices iniciales	Tiempo
1	13	2
5	7	4,6
10	4	11,4
20	0	15

Cuadro 5: Resultados para distintos π_ρ siendo el fluido más denso el de menor Re

En la simulación con $\pi_\rho = 20$ pasados 15 unidades de tiempo adimensionales no se llegó a observar ningún vórtice aunque quizás si se simula más tiempo se podría llegar a desarrollar la inestabilidad. Lo que sí es seguro es que el número de vórtices iniciales sería únicamente 1 pues llegado el instante 1500 ya los errores en la velocidad vertical se han unido en una única región de velocidad vertical negativa y otra de velocidad positiva. Es decir, los errores podrían aumentar en intensidad, pero no en número, apareciendo (si aparece) una perturbación inicial cuya longitud de onda sería igual al tamaño del dominio en la dirección “x” (longitud de onda=L).

Por otra parte hay que aclarar que los resultados de la simulación con $\pi_\rho = 1$ no están convergidos y quizás con una malla de mayor resolución se podría observar un mayor número de vórtices iniciales (nunca un número menor).

Analizando la tabla 5 se puede concluir que la diferencia de densidades es un claro aspecto estabilizador, pues cuanto mayor es π_ρ mayor longitud de onda deben de tener las perturbaciones para conseguir desarrollar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Sin embargo, es necesario recordar que en las tres simulaciones mostradas en la tabla anterior el número de Reynolds del flujo inferior es menor al del superior, por lo tanto lo que realmente se ha demostrado es que cuanto mayor sea la densidad del fluido con menor Reynolds en comparación a la densidad del fluido de mayor Reynolds más estable va a ser el sistema. Pero, ¿Que pasa si el flujo más denso es el que tiene mayor número de Reynolds? ¿Seguiría siendo la diferencia de densidades un factor estabilizador?

Para contestar a las preguntas del párrafo anterior se van a realizar tres simulaciones más. En estas se mantendrán nulos los conjuntos adimensionales We y $1/Fr$ y se le dará a π_ρ tres valores distintos que van a ser 1, 0.5, 0.1 y 0.01. Cuando π_ρ valga 0.5, 0.1 ó 0.01 la densidad del fluido superior será mayor a la del inferior no obstante debido a la ausencia de gravedad el hecho de que un fluido este arriba o abajo no cambia absolutamente nada los resultados. Obsérvese que cuando π_ρ es menor de uno, cuanto menor sea dicho número adimensional mayores van a ser las diferencias de densidad, exactamente al contrario de lo que sucedía cuando π_ρ era mayor de uno.

Para llevar a cabo estas nuevas simulaciones se ha tenido que bajar el número de Reynolds del flujo superior, puesto que con el anterior y para $\pi_\rho = 1$ se obtenía un número de vórtices iniciales mayor al de la simulación con mayores números de Reynolds cuyos resultados han sido convergidos (ver el apartado 7), tal y como se ha comentado previamente. Por lo tanto en este nuevo estudio los números de Reynolds usados han sido $Re_1 = 1 \cdot 10^3$ (el mismo que en el estudio anterior) y $Re_2 = 2,5 \cdot 10^4$, obsérvese que el fluido superior (que para $\pi_\rho = 0,1$, $\pi_\rho = 0,5$ y $\pi_\rho = 0,01$ es el más denso) sigue teniendo un mayor número de Reynolds, de lo contrario no se estaría buscando la respuesta a las preguntas planteadas en el párrafo anterior.

Los resultados de las tres nuevas simulaciones se pueden observar en la tabla 6.

Relación de densidades π_ρ	Vórtices iniciales	Tiempo
1	6	4.8
0.5	6	5.6
0.1	4	10
0.01	0	15

Cuadro 6: Resultados para distintos π_ρ siendo el fluido más denso el de mayor Re

Una vez realizado este estudio ya si se puede contestar a las preguntas planteadas anteriormente. Lo que se ha comprobado es que cuando el fluido con mayor número de Reynolds es el más denso la diferencia de densidades sigue siendo un factor estabilizador. Es decir, la diferencia de densidades entre los dos fluidos es siempre

un factor estabilizador independientemente de si el fluido con mayor densidad es el que tiene mayor o menor número de Reynolds.

Por otra parte, con estos estudios se ha podido confirmar que la velocidad horizontal en la línea central depende de las densidades de los fluidos, tal y como se adelantó en el subapartado 8.2. Para llegar a esta conclusión se ha comparado la velocidad horizontal en el instante 5 en dos de las simulaciones que se han llevado a cabo en este apartado. Concretamente se han usado las simulaciones con $\pi_\rho = 10$ y $\pi_\rho = 0,1$, pues en ellas la relación de densidades son inversas (el resto de parámetros adimensionales de estas simulaciones ya se han comentado anteriormente). En el mosaico de figuras 34 se muestran dos capturas de la velocidad horizontal en las inmediaciones de la línea central de la malla (indicada con una línea negra en ambas imágenes).

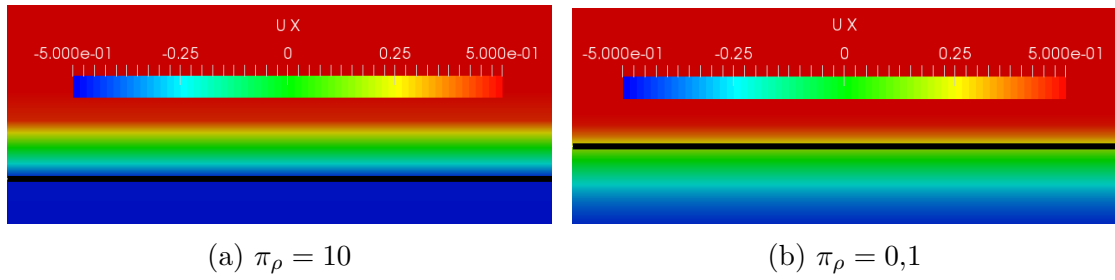


Figura 34: Velocidad horizontal el instante 5 en la zona central

Concretamente la velocidad horizontal en el instante 5 en la línea central es de -0.48 en la simulación con $\pi_\rho = 10$ (mayor densidad del flujo inferior, que es el que tiene inicialmente una velocidad horizontal de -0.5) y de 0.21 en la simulación con $\pi_\rho = 0,1$. Esto indica claramente que la región en la que los flujos se frenan y por tanto la región en la que existe una velocidad horizontal nula se extiende hacia la parte en la que se encuentra el fluido con menos densidad (esto se observa también perfectamente en las figuras anteriores). Hay que resaltar que aunque los números de Reynolds no son iguales en las dos simulaciones, en ambas el flujo inferior tiene un menor número de Reynolds, de forma que es evidente que es la densidad la que establece hacia que parte del dominio se extiende la región de frenado. Esto es así porque aunque los dos flujos tienen inicialmente (en todas las simulaciones mostradas hasta el momento) las mismas velocidades en valor absoluto, los flujos en los que la densidad es mayor tienen una mayor cantidad de movimiento, de forma que se requiere mayores fuerzas para frenarlos.

Como ya se dijo en el apartado 9.2 el número de Reynolds sí influye en el frenado de cada flujo y por eso los valores (en módulo) de las velocidades comentadas en el párrafo anterior (0.48 y 0.21) no son exactamente los mismos.

A modo de conclusión se puede afirmar que la diferencia de densidades entre los dos fluidos tiene un efecto estabilizador, es decir, a medida que se aumenta la diferencia de densidades los vórtices iniciales tardan más tiempo en aparecer y son menores en número (mayor longitud de onda de la perturbación inicial). Dicha conclusión coincide con la obtenida por Rangel y Sirignano [7], pues en su estudio

demostraron que la diferencia de densidades entre los dos fluidos tiene un efecto estabilizador que ralentiza el desarrollo de la inestabilidad.

Por otra parte en este apartado también se ha llegado a la conclusión de que en caso de igualdad de velocidades (en valor absoluto) los vórtices se van a mover siempre en la dirección del flujo de mayor densidad.

12. Estudio influencia de la tensión superficial

En este apartado se va a analizar el efecto que tiene la tensión superficial sobre la aparición y el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Para ello se ha repetido la simulación con $Re_1 = 2,5 \cdot 10^3$, $Re_2 = 1 \cdot 10^5$, $\pi_\rho = 10$ y sin gravedad pero se ha variado la tensión superficial. Concretamente se ha usado la tensión superficial existente entre el agua y el aire que es de 0.073 N/m (kg/s^2) y la que existe entre el aire y el mercurio cuyo valor es de 0.487 N/m y es una de las tensiones superficiales más altas existentes en la naturaleza [22]. Hay que aclarar que la tensión superficial depende de la temperatura a la que se encuentren los fluidos, los valores que se han usado son para una temperatura de 20 grados centígrados.

Como en todo el trabajo, en este apartado también se van a usar variables adimensionales. De esta forma en vez de hablar de valores de tensión superficial se va a usar el inverso del número de Weber. Dicho grupo adimensional para el caso de tensión superficial agua-aire toma el siguiente valor:

$$\frac{1}{We} = \frac{\sigma}{\rho_1 L U_0^2} = \frac{0,07}{1 \cdot 1 \cdot 1^2} = 0,07 \quad (52)$$

Y para el caso de tensión superficial mercurio-aire:

$$\frac{1}{We} = 0,487 \quad (53)$$

Lo primero que se va a hacer es comparar los resultados en los que $1/We = 0$ con los de $1/We = 0,07$. A diferencia de lo que sucedía cuando se realizaban las simulaciones con gravedad, los errores numéricos iniciales en la velocidad vertical son del mismo orden, de forma que ahora sí son relevantes las diferencias de tiempo que pueda haber entre las dos simulaciones.

Para $1/We = 0,07$ el número de vórtices iniciales que aparece es dos, tal y como se puede observar en las figuras 35 y 36. Mediante el estudio de la variable α en función de la posición “x” en la línea central (figura 35) se llega a la conclusión de que se han formado dos “olas” iniciales puesto que dicha variable toma en dos regiones el valor 1, lo que indica que el fluido inferior ha invadido la parte superior, y en otras dos el valor 0 que indica lo contrario. En este caso se ha optado por representar la variable α en una gráfica en vez de hacer una captura de la interfaz visual del programa porque las olas son bastante pequeñas en altura debido al efecto de la tensión superficial y no son fácilmente detectables.

Como no puede ser de otra forma la causa de las variaciones de α son la presencia de vórtices y en la figura 36 se puede observar la existencia de estos mediante el análisis de la velocidad vertical. Se aprecia como existen dos zonas de velocidad vertical positiva (zona roja) y dos de velocidad negativa (zonas azules), lo cual es un claro indicativo de la presencia de dos vórtices.

Comparando las dos figuras anteriores se puede observar como las zonas de velocidad positiva (recuérdese que la dirección positiva del eje “y” es hacia arriba) se

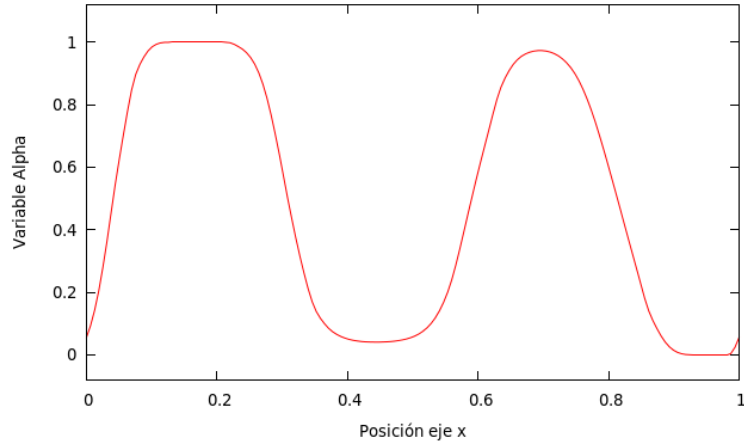


Figura 35: Variable α en función de la posición “x” en la línea central, instante 700

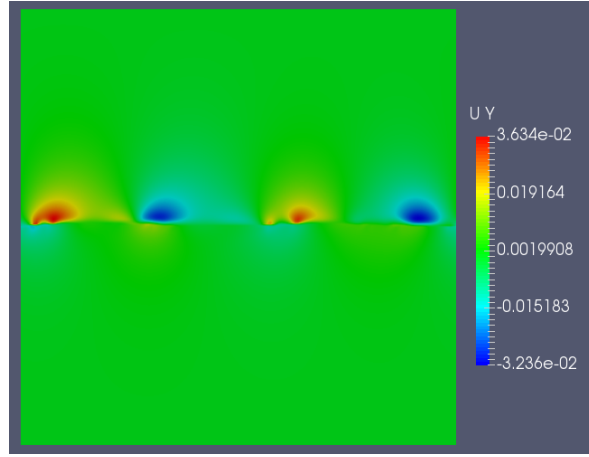


Figura 36: Velocidad vertical en el instante 700

corresponden con aquellas donde el valor de α es uno y las de velocidad negativa con el valor 0 de α . Esto es totalmente lógico pues en las zonas de velocidad positiva el fluido inferior esta invadiendo la parte superior y en las de velocidad negativa es el fluido de arriba el que invade el dominio inferior.

En la figura 37 se pueden apreciar los valores de velocidad vertical que provocaron el desarrollo de la inestabilidad en la simulación realizada en las mismas condiciones pero con $1/We = 0$. Comparando esta imagen con la figura 36 se llega a la conclusión de que la tensión superficial tiene un efecto estabilizador pues hace que las perturbaciones necesarias para desarrollar la inestabilidad tengan un mayor tamaño lo que implica un mayor número de onda.

Hay que decir también que el tiempo que ha tardado en aparecer la inestabilidad ha sido bastante mayor en la simulación realizada con tensión superficial (7 unidades de tiempo adimensional frente a 5). No obstante esto no es más que una consecuencia directa de lo explicado en el párrafo anterior puesto que con el paso del tiempo los errores numéricos van creciendo en la simulación y como ya se ha dicho en repetidas ocasiones, en las simulaciones que se están llevando a cabo las perturbaciones son los errores en el cálculo.

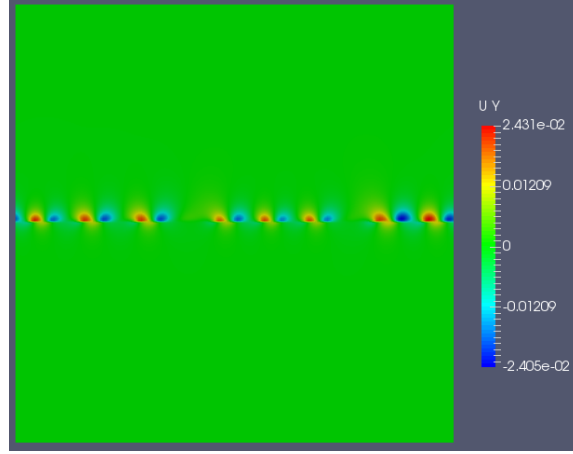


Figura 37: Velocidad vertical vórtices iniciales simulación con $1/We = 0$

La tensión superficial no solo influye en la aparición de la inestabilidad sino que además tiene un efecto similar a la gravedad en el desarrollo de ésta pues también se opone a la formación de las “espirales”. Este resultado es totalmente lógico pues la tensión superficial es una fuerza tangente a la interfase existente entre dos fluidos que tiende a minimizar el área de la superficie que forma la interfase (en el caso que se está estudiando tiende a minimizar la longitud al tratarse de un estudio bidimensional). Téngase en cuenta que cuando aparecen las primeras “olas” y cuando se forman las “espirales” la longitud que forma la interfase aumenta, a lo cual se opone la tensión superficial como se acaba de comentar.

Como se dijo al comienzo de este apartado también se ha realizado una simulación con las mismas condiciones pero introduciendo la tensión superficial del mercurio. En esta simulación no se ha producido la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz pues no se llegan a alcanzar unas perturbaciones con la intensidad y tamaño suficiente para que alguna partícula del flujo inferior invada la parte superior o viceversa. Esto no implica que la inestabilidad no se produzca en ningún caso con la tensión superficial existente entre el mercurio y el aire, solo indica que se necesitarían otras condiciones para que se produzca, por ejemplo unos números de Reynolds superiores.

En los estudios llevados a cabo por Rangel y Sirignano [7] y por Fakhari y Lee [8] se afirma que la tensión superficial tiene un efecto estabilizador sobre la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz lo cual coincide con lo que se ha observado a lo largo de este apartado.

13. Simulaciones con distintas velocidades

Hasta este momento todas las simulaciones que se han llevado a cabo han tenido las mismas velocidades iniciales. Concretamente el flujo inferior ha tenido siempre una velocidad horizontal de -0.5 (unidades adimensionales) y el flujo superior la misma en valor absoluto pero con la dirección opuesta. De esta forma la diferencia de velocidades entre los dos flujos (U_0) que es lo que define el número de Reynolds ha sido 1 en todas las simulaciones.

El objetivo de esta sección es demostrar que ni la diferencia de velocidades ni la dirección de los flujos son factores determinantes. Este apartado podría incluirse dentro de la sección 7, pues realmente forma parte del estudio de convergencia. No obstante se ha preferido mostrarlo tras haber comentado los distintos estudios para que el lector pueda comparar los resultados con los previamente obtenidos.

13.1. Variación del módulo de las velocidades

En este subapartado se va a demostrar que los números de Reynolds están bien definidos y que por lo tanto da igual que las velocidades sean distintas siempre y cuando éstos sean constantes. Para ello se va a repetir la simulación con un único fluido cuyos resultados fueron convergidos en el apartado 7 ($Re = 1 \cdot 10^5$ y $1/Fr = 0$), pero en este caso las velocidades introducidas serán -2.5 y 2.5 m/s, de forma que el valor de U_0 será 5 m/s en vez de 1 m/s. Obviamente al variar U_0 (ahora es 5 veces mayor) se ha tenido que multiplicar la viscosidad por 5 para conseguir mantener el mismo número de Reynolds.

Como el lector habrá podido observar en el párrafo anterior se ha hablado de variables dimensionales (velocidad en m/s). Esto se ha hecho para demostrar que los parámetros introducidos en la simulación no han sido los mismos, puesto que al realizar la adimensionalización sucede lo siguiente:

$$u'_1 = \frac{u_1}{U_0} = \frac{-2,5}{5} = -0,5 \quad (54)$$

$$u'_2 = \frac{u_2}{U_0} = \frac{2,5}{5} = 0,5 \quad (55)$$

siendo u_1 la velocidad horizontal inicial del flujo inferior y u_2 la del superior.

Como se puede observar en las ecuaciones anteriores las velocidades adimensionales iniciales son las mismas que en la simulación con $U_0 = 1$, sin embargo, las velocidades introducidas en los cálculos si varían respecto a dicha simulación.

Se ha comprobado que los δt usados en la simulación con $U_0 = 5$ son menores (recuérdese que el “solver” interFoam realiza un ajuste automático de δt). Esto es así porque el número de Courant es directamente proporcional a U_0 (la definición del número de Courant se encuentra en el apartado 5) de forma que para que este grupo adimensional no se haga demasiado grande y exceda el valor máximo que se le ha establecido (se le asignó un máximo de 1), es necesario reducir el δt .

En el mosaico de figuras 38 se muestran los primeros vórtices que aparecen en la simulación realizada con $U_0 = 5$ y en la realizada con $U_0 = 1$. Las capturas que se muestran corresponden a la vorticidad justo antes de que los vórtices comiencen a unirse rotando unos sobre otros.

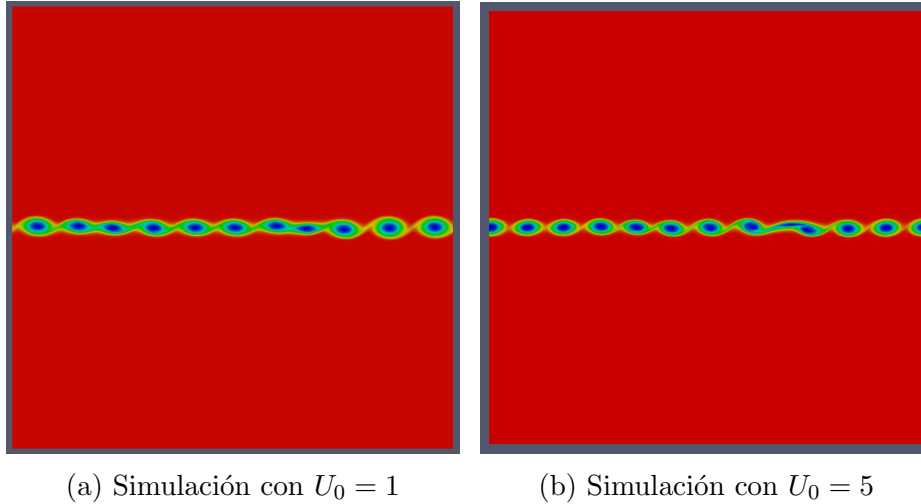


Figura 38: Vórtices iniciales

Comparando las figuras anteriores se llega rápidamente a la conclusión de que el número de Reynolds está bien definido y por lo tanto la diferencia de velocidades no es un factor determinante en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, siempre y cuando se mantenga constante el número de Reynolds.

Es necesario comentar que en la simulación llevada a cabo con U_0 todo sucede más rápido (tiempos no adimensionalizados) siendo la figura 38b correspondiente al segundo 0.48 y la 38a al segundo 2.38. Sin embargo cuando se usa variables adimensionales (como se ha usado en todo el trabajo) todo coincide, pues en la simulación con $U_0 = 5$ el segundo $t = 0,48$ corresponde al tiempo adimensional $t' = 2,4$. Por lo tanto se puede afirmar que las capturas mostradas anteriormente corresponden aproximadamente al mismo instante de tiempo adimensional (recuérdese que para $L = 1$ y $U_0 = 1$ se cumple $t = t'$).

Por último hay que aclarar que a partir de los segundos que se muestran en las figuras 38a y 38b los vórtices comienzan a unirse entre ellos en las dos simulaciones y además las unificaciones se producen aproximadamente en los mismos tiempos adimensionales.

13.2. Simulación con flujos en la misma dirección

A lo largo de este trabajo se ha dicho en repetidas ocasiones que para que aparezca la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz no es un requisito que los flujos tengan direcciones opuestas, la única condición necesaria es que éstos presenten una diferencia de velocidad. En este subapartado se va a comprobar que esto es efectivamente así.

Para llevar a cabo esta verificación se va repetir una de las simulaciones con un solo fluido realizadas en el apartado 9. Concretamente se va a llevar a cabo la simulación con $Re = 5 \cdot 10^4$ y con $1/Fr = 0$ pero en este caso el flujo superior tendrá una velocidad de 2 (unidades adimensionales) y el inferior de 1. Como se puede observar, en este caso si varían las velocidades adimensionales respecto a la simulación con los flujos en la misma dirección, sin embargo, U_0 en este caso no varía puesto que sigue siendo 1. Por lo tanto en este caso no hay que variar la viscosidad porque el número de Reynolds permanece constante al no variar U_0 .

En el mosaico de de figuras 39 se muestra el campo de vorticidad de la simulación con los flujos iniciales en direcciones opuestas 39a y de la simulación con los flujos en la misma dirección 39b. Concretamente se expone el instante anterior al comienzo del proceso de unión de los vórtices.

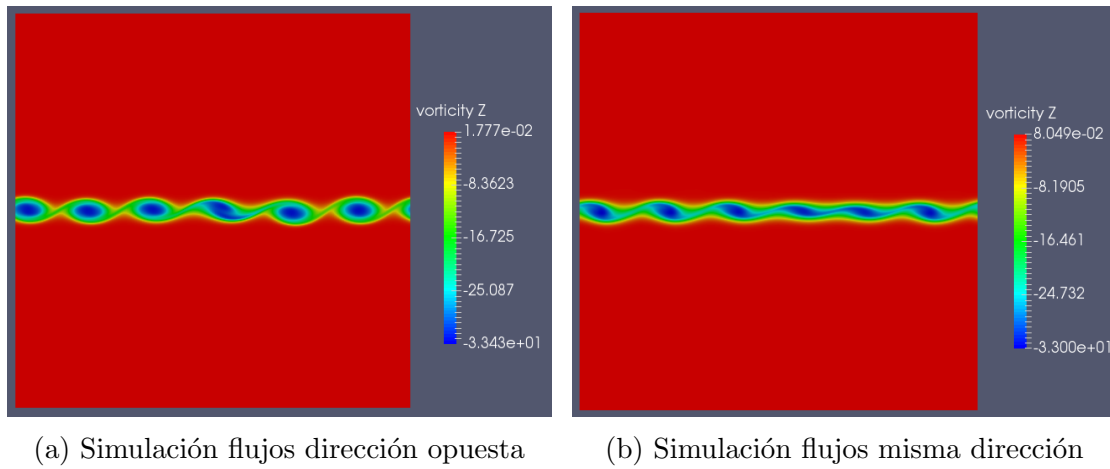


Figura 39: Vórtices iniciales

En las figuras 39a y 39b se aprecia como el número de vórtices iniciales es exactamente el mismo (6) y además la componente “z” máxima de la vorticidad es aproximadamente la misma (-3.3). Por lo tanto se llega a la conclusión de que el hecho de que los fluidos vayan en una misma dirección no influye en la aparición de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (siempre y cuando la diferencia de velocidades iniciales sea la misma).

Hay que aclarar que la figura 39a corresponde al instante 410 mientras que la captura 39b fue tomada en el instante 460, es decir, existe una pequeña variación de 0.5 unidades de tiempo adimensionales entre las dos simulaciones. Esto en principio no debería suceder, no obstante hay que recordar que en la simulación con los flujos en direcciones opuestas la inestabilidad se desarrolla estáticamente mientras que en la simulación con los flujos en la misma dirección los vórtices tienen una velocidad horizontal de aproximadamente 1.5 unidades adimensionales. Por lo tanto al haber un movimiento horizontal constante los errores de cálculo pueden ser distintos y esto afecta al tiempo que tarda en aparecer la inestabilidad en la simulación.

Lo que sí se puede apreciar mediante la comparación de las dos simulaciones es que el hecho de que los dos flujos vayan con la misma dirección y los vórtices se muevan con una velocidad de 1.5 unidades adimensionales afecta al desarrollo

de la inestabilidad. Lo que sucede es que el movimiento horizontal de la velocidad hace que el flujo que forma las “espirales” tienda a desprenderse. En la figura 40 se aprecia el fenómeno al que se esta haciendo referencia.

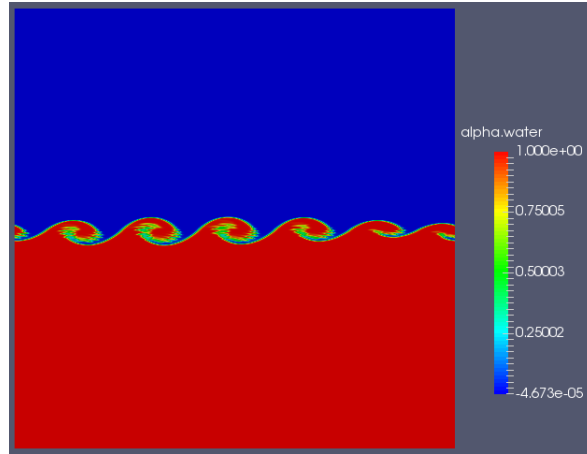


Figura 40: Variable α en el instante 480

Esta tendencia inicial del flujo a desprenderse provoca finalmente la aparición de una zona en la que los dos flujos están totalmente mezclados tal y como se observa en la figura 41.

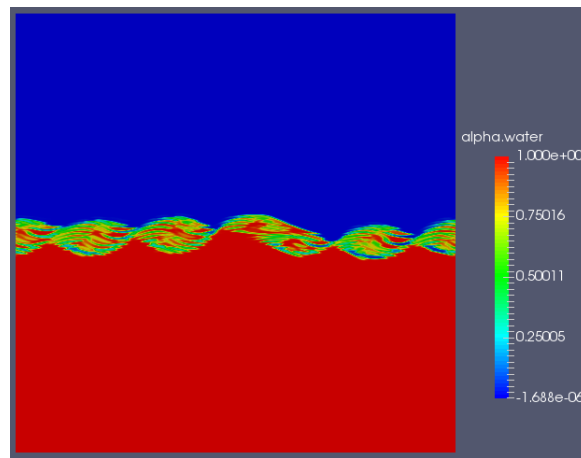


Figura 41: Variable α en el instante 530

La aparición de esta zona no impide las uniones entre vórtices, es decir, el desarrollo habitual de la inestabilidad continúa, sin embargo, los resultados no son los mismos.

Debido a lo comentado previamente, a lo largo de todo el trabajo se ha evitado realizar simulaciones con los flujos en la misma dirección pues se cree que el hecho de que la media de velocidades del flujo no sea cero provoca la aparición de errores numéricos que conllevan la obtención de algunos resultados no esperados.

14. Comparación con experimento

A lo largo de todo el trabajo se ha estado variando las propiedades de los fluidos con la intención de estudiar el efecto de los distintos números adimensionales, estas propiedades han sido introducidas sin tener en cuenta si pertenecen a algún fluido real o no. En este apartado sin embargo se va a simular un caso real. Concretamente se va a reproducir el experimento llevado a cabo por Thorpe en el año 1969 [5].

Los resultados de la simulación que se va a realizar en este apartado no solo se van a comparar con los experimentales obtenidos por Thorpe sino que además se van a comparar con los teóricos y con los obtenidos en otra simulación llevada a cabo por Strubelj en el año 2009 [23].

Este apartado no se realiza únicamente para darle una aplicación al fenómeno que se ha estado estudiando sino que además sirve para validar el modelo usado a lo largo de todo el trabajo, como ya se adelantó en el apartado 7.

Las condiciones iniciales del experimento de Thorpe [5] se muestran en la figura 42 (hay que tener en cuenta que la imagen no está a escala). El experimento fue realizado en un tubo rectangular de cristal con una longitud de 1830 mm (1.83 m), una altura de 30 mm y una anchura de 100 mm. En su interior contenía dos fluidos distintos, el primero de ellos (el inferior) era agua y el segundo una mezcla de tetracloruro de carbono y parafina comercial (las densidades y viscosidades de estos fluidos se muestran en la figura 42). El experimento consiste en inclinar dicho tubo un ángulo de 4.13 grados tal y como se observa en la figura 43, esto provoca que el fluido inferior se mueva hacia la parte izquierda del tubo y el superior hacia la derecha. Es decir, la inclinación provoca un movimiento en direcciones opuestas de los flujos lo que a su vez provoca la aparición de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

En el artículo de Thorpe [5] se incluye un análisis lineal en el que se obtiene una solución para la velocidad de los flujos antes de que se produzca la inestabilidad. Hay que resaltar que en este análisis se ha despreciado el efecto de las viscosidades y de las paredes. Los resultados obtenidos son:

$$U_1 = -\frac{(\rho_1 - \rho_2)h_2 g \sin \gamma}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} t \quad (56)$$

$$U_2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)h_1 g \sin \gamma}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} t \quad (57)$$

Aplicando estas ecuaciones se obtiene que en el segundo 1 (en este segundo todavía no aparece la inestabilidad, como se verá próximamente) la velocidad del flujo superior será $U_2 = 0,087$ m/s y la del flujo inferior $U_1 = -0,087$ m/s. En la simulación realizada, las velocidades de los flujos en el mismo segundo son 0.092 m/s y -0.089. Velocidades muy parecidas a las obtenidas con el análisis teórico. El hecho de que en la simulación los dos flujos no tengan la misma velocidad en valor absoluto es lógico pues éstos tienen viscosidades distintas (recordar que en el análisis teórico la viscosidad se ha despreciado). Por otra parte, hay que aclarar que cuando se habla del tiempo no se tiene en cuenta las milésimas de segundo que se tarda en inclinar el tubo.

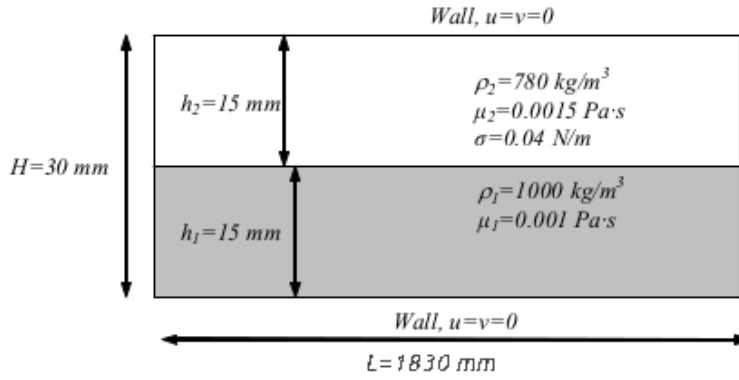


Figura 42: Condiciones iniciales del experimento de Thorpe [24]

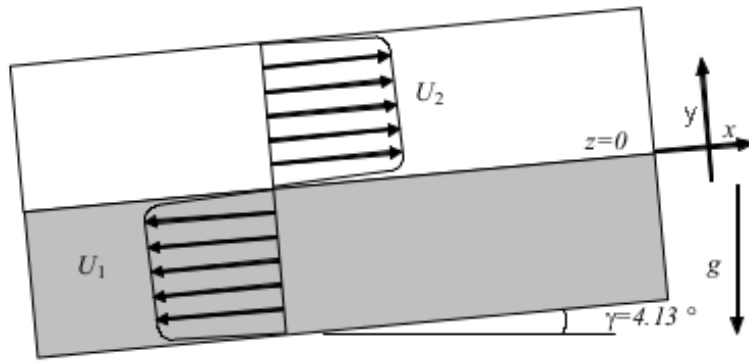


Figura 43: Inclinación del tubo correspondiente al experimento de Thorpe [24]

La simulación que se ha llevado a cabo para reproducir este experimento se ha realizado con el “solver” interFoam y se trata de una simulación bidimensional, igual que todas las que se han llevado a cabo en este apartado. Hay que resaltar que la longitud del tubo (1.83 m) es mucho mayor a la anchura de éste (0.1 m) característica que justifica el uso de un modelo bidimensional para llevar a cabo la simulación.

Lo que sí cambia respecto a las simulaciones anteriores es la malla, en este caso no se usa un dominio cuadrado sino uno rectangular con las dimensiones del tubo. Además en este caso las paredes no tienen ningún movimiento y el fluido inicialmente también se encuentra estático. La malla que se ha usado para la realización de esta simulación está dividida en 3600 celdas en la dirección “x” y en 60 en “y”, dicha malla es exactamente la misma que se usó en la simulación llevada a cabo por Strubelj [23]. Las propiedades de los fluidos que se han usado para la simulación son exactamente las que aparecen en la figura 42.

Hay que aclarar que aunque en la simulación el dominio va a aparecer en posición horizontal (no inclinado) se está teniendo en cuenta el efecto de la gravedad (de lo contrario los dos fluidos se quedarían estáticos). Es decir, los ejes “x” e “y” son los que aparecen en la figura 43 y lo que se ha hecho es introducir la gravedad en forma vectorial, descompuesta según estos ejes tal y como se muestra a continuación:

$$g_x = g \cdot \sin(4,13^\circ) \quad (58)$$

$$g_y = g \cdot \cos(4,13^\circ) \quad (59)$$

Como ya se dijo al comienzo de este apartado los resultados obtenidos también se van a comparar con los teóricos. Dichos resultados teóricos se obtienen aplicando el método descrito en el subapartado 3.2. Aquí directamente se introdujeron las características de los fluidos usados por Thorpe (previamente comentados) en las ecuaciones (19), (20) y (21), obteniéndose que la longitud de onda crítica es de 0.027 m (27 mm) y la diferencia de velocidades entre los flujos debe ser de al menos 0.2 m/s.

Una vez obtenidos los resultados teóricos se va a proceder a compararlos con la simulación realizada en este trabajo, la simulación llevada a cabo por Strubelj [23] y el experimento realizado por Thorpe [5]. Para ello se va a comparar el tiempo que tarda en aparecer la inestabilidad (t_{onset}) y la longitud de onda de la perturbación inicial (λ_{cr}) tal y como se muestra en la tabla

Reynolds 1	t_{onset} (s)	λ_{cr} (mm)
Análisis teórico	1.5-1.7	27
Experimento de Thorpe	1.88 ± 0.07	25-45
Simulación de Strubelj	2.12	39.1
Simulación realizada	2.3	35

Cuadro 7: Comparación de los resultados del experimento de Thorpe

Como se puede observar en la tabla 7, la longitud de onda crítica se encuentra perfectamente en el rango de valores medidos por Thorpe en su experimento. Por otra parte el tiempo que tarda en aparecer la inestabilidad en la simulación realizada es un poco mayor al resto de resultados. No obstante, hay que decir que el tiempo que tarda en aparecer la inestabilidad es un parámetro poco objetivo. En el caso de la simulación realizada por Strubelj el criterio para decir que la inestabilidad había comenzado fue que la perturbación tuviese una magnitud el triple de grande que la inicial que le introdujo a la simulación. Sin embargo en la simulación realizada no se introduce ninguna perturbación inicial, así que el criterio tomado para decir que la inestabilidad ha comenzado ha sido que en la línea central del tubo (y en la parte central del eje “x” que es donde se produce el fenómeno) haya zonas en las que la variable α sea $\leq 0,55$ ó $\geq 0,45$. Que la variable α tome esos valores garantiza que existen regiones en las que las celdas que están por encima de la línea central tienen al menos un 60 % de fluido inferior y viceversa.

Hay que aclarar que para obtener la longitud de onda se ha calculado la longitud media existente entre las “olas” (distancia media que hay entre los vórtices iniciales) mediante el estudio de la variable α . En la figura 44 se muestra la variable α en la línea central en función de la posición en el eje “x”. Se ha representado solo la parte correspondiente a la región central del tubo (0.615 m-1.215 m) y concretamente se muestra el segundo 2.8, instante en el que las “olas” ya han adquirido un tamaño considerable. Recuérdese que desde el momento en que aparecen los primeros vórtices

hasta que éstos comienzan a unirse la longitud de onda permanece constante, puesto que la perturbación lo único que hace es aumentar en amplitud pero no en frecuencia.

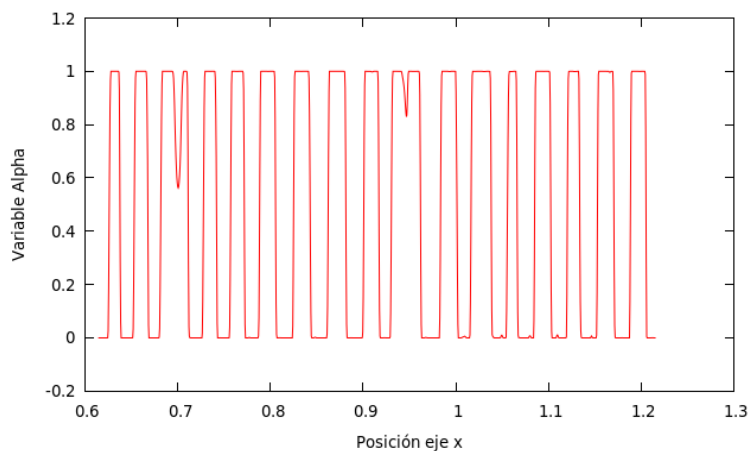


Figura 44: Variable α en $t = 2,8$ en la línea central de los 0.6 metros centrales

En la figura 44 se observan claramente 17 zonas en las que $\alpha = 1$ ó $\alpha = 0$, lo que indica la existencia de 17 “olas” en la región de 0.6 metros representadas. De forma que haciendo una simple división se obtiene que la longitud de onda media es de 35 milímetros.

Recuérdese que anteriormente se comentó que según el análisis teórico y usando la ecuación (19) se obtuvo que la diferencia de velocidades para que aparezca la inestabilidad debe de ser mayor a 0.2 m/s. Pues bien, en el segundo 2.3, que es cuando se ha considerado que comienza la inestabilidad en la simulación realizada, el flujo superior tiene una velocidad de 0.35 m/s y el inferior -0.25, de forma que $\Delta U = 0,6$, cumpliéndose perfectamente el requisito establecido por el análisis teórico.

Por último se va a realizar una comparación del desarrollo de la inestabilidad en la simulación realizada en este trabajo con la simulación llevada a cabo por Strubelj. Para ello se van a mostrar 8 capturas de la variable α en las 7 décimas de segundo posteriores a la aparición de la inestabilidad.

Comparando las figuras 45 y 46 se observa como en la simulación realizada por Strubelj la inestabilidad aparece antes (segundo 2) como ya se dijo anteriormente, pero sin embargo se desarrolla más rápido en la simulación realizada en este trabajo. Es decir, en la simulación realizada la amplitud de la perturbación crece más rápido una vez que aparece la inestabilidad y los fluidos comienzan a formar antes las “espirales” (en el segundo 3 de la figura 46 ya se pueden observar las primeras “espirales”). No obstante, a pesar de estas diferencias las simulaciones son bastante parecidas tal y como se puede observar.

Tras realizar todas estas comparaciones y viendo que todos los resultados son muy parecidos, se puede decir que la simulación está validada. Esto da garantías de que todas las simulaciones realizadas en este trabajo son fiables y por lo tanto las conclusiones realizadas están basadas en resultados convergidos y validados.

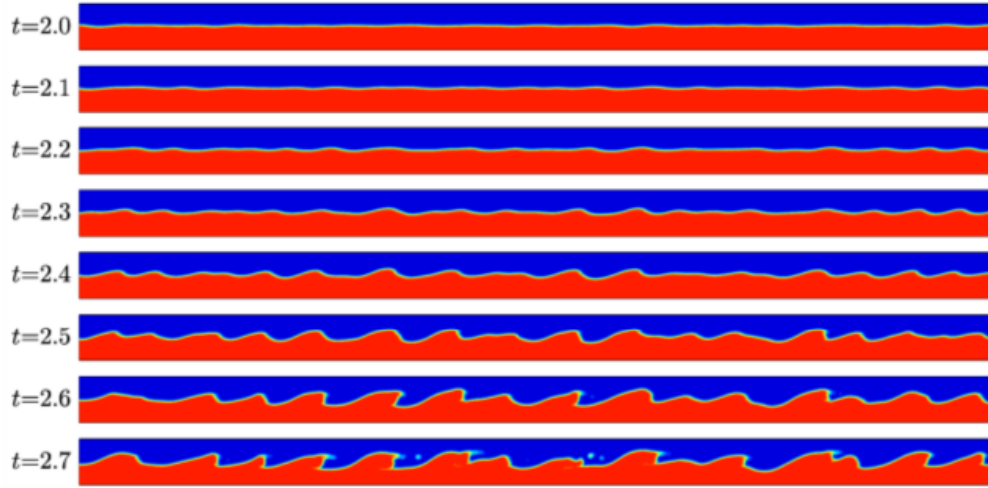


Figura 45: Interfase en los 0.6 metros centrales. Simulación de Strubelj[23]

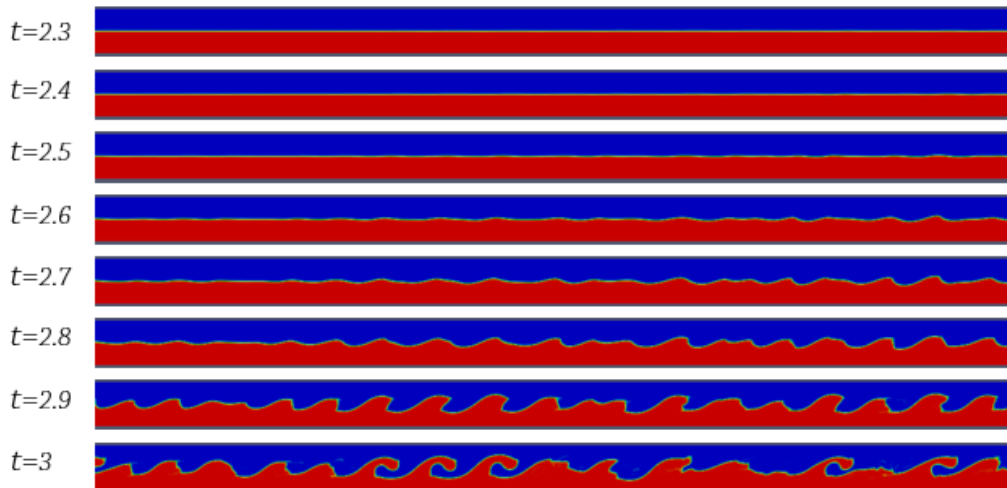


Figura 46: Interfase en los 0.6 metros centrales. Simulación realizada en este trabajo.

15. Conclusiones

Una vez terminado este trabajo se puede afirmar que se ha conseguido el objetivo inicial con el que fue planteado. Es decir, se ha logrado describir el efecto que tiene cada uno de los parámetros que intervienen en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Se ha comprobado que cuando la inestabilidad se produce entre dos flujos compuestos por el mismo fluido el único grupo adimensional que influye en el fenómeno es el número de Reynolds pues el de Froude no tiene ningún efecto. O dicho de otra forma, se ha comprobado que la gravedad no tiene ningún efecto sobre la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz cuando solo entra en juego un fluido. Además se ha llegado a la conclusión de que al aumentar el número de Reynolds el sistema se vuelve más inestable, puesto que aumenta el dominio de las fuerzas inerciales frente a las viscosas que son las que se oponen al desarrollo de la inestabilidad. Por lo tanto, al aumentar el número de Reynolds la longitud de onda de las perturbaciones iniciales necesaria para desarrollar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es menor, de forma que inicialmente aparece un mayor número de vórtices.

Por otra parte, se ha comprobado que cuando la inestabilidad se produce entre dos fluidos distintos el sistema se vuelve más inestable al aumentar el número de Reynolds de cualquiera de los dos flujos. También se ha llegado a la conclusión de que en este caso la gravedad sí tiene un claro efecto estabilizador pues aunque no impide la aparición de la inestabilidad sí se opone a la formación de las “espirales” típicas de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. En cuanto a la tensión superficial, se ha comprobado que además de oponerse a la formación de las “espirales” también se opone a la aparición de la inestabilidad pudiendo incluso llegar a impedir que esta aparezca. Es decir, al aumentar la tensión superficial, la longitud de onda de las perturbaciones iniciales necesaria para desarrollar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es mayor, de forma que inicialmente aparecen menos vórtices. Por último se ha llegado a la conclusión de que la diferencia de densidades entre los dos fluidos que entran en juego también se opone a la aparición de la inestabilidad y además se ha comprobado que en caso de que los dos flujos tengan la misma velocidad y direcciones opuestas, los vórtices iniciales van a tener una velocidad y dirección similar a la del flujo con mayor densidad.

En este trabajo también se ha conseguido demostrar mediante el estudio de un experimento concreto, que los resultados de los análisis teóricos y de las simulaciones numéricas para el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz son muy similares a los experimentales a pesar de las simplificaciones que conllevan los métodos teóricos y numéricos.

Por último se desea plantear la posibilidad de aplicar en el futuro el modelo que en este trabajo se ha usado a casos concretos en los que aparece la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, como las olas del mar, las “olas” que se producen en las nubes o incluso aplicarlo a procesos industriales como la mezcla de fluidos en las cámaras de combustión. Se cree que sería interesante volver a estudiar los mismos parámetros que en este trabajo se han analizado pero aplicados a casos concretos como los que se acaban de nombrar. Hay que aclarar que en este trabajo no se han realizado estas aplicaciones porque se sale de los objetivos previamente establecidos y porque su

realización implicaría un exceso en número horas de trabajo respecto a la duración habitual de un TFG.

Referencias

- [1] H. HELMHOLTZ, ON DISCONTINUOUS MOVEMENTS OF FLUIDS, PHIL. MAG, VOLUMEN 36, PAGES 337-346, 1868
- [2] L. KELVIN, HYDROKINETIC SOLUTIONS AND OBSERVATIONS, PHIL. MAG, VOLUMEN 42, PAGES 362-377, 1871
- [3] G.I. TAYLOR, EFFECT OF VARIATION IN DENSITY ON THE STABILITY OF SUPERPOSED STREAMS OF FLUID, PROC.R.SOC, VOLUMEN 132, PAGES 499-523, 1931
- [4] J.W. MILES, ON THE STABILITY OF HETEROGENEOUS SHEAR FLOWS, PARTE 2, J.FLUIDS MECH, VOLUMEN 16, PAGES 209-227, 1963
- [5] S.A. THORPE, EXPERIMENTS ON THE INSTABILITY OF STRATIFIED SHEAR FLOWS: IMMISCIBLE FLUIDS, JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOLUMEN 39, PAGES 25-48, 1969
- [6] H.G. LEE; J. KIM, TWO-DIMENSIONAL KELVIN-HELMHOLTZ INSTABILITIES OF MULTI-COMPONENT FLUIDS, EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS B/FLUIDS, VOLUMEN 49, PAGES 77-88, 2015
- [7] R.H. RANGEL; W.A. SIRIGNANO, NONLINEAR GROWTH OF KELVIN-HELMHOLTZ INSTABILITY: EFFECT OF SURFACE TENSION AND DENSITY RATIO, PHYS. FLUIDS, VOLUMEN 31, PAGES 1845-1855, 1988
- [8] A. FAKHARI; T. LEE, MULTIPLE-RELAXATION-TIME LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR IMMISCIBLE FLUIDS AT HIGH REYNOLDS NUMBERS, PHYS. REV. E, VOLUMEN 87, 2013
- [9] DEPARTMENT OF ASTRONOMY AND PHYSICS, SAINT MARY'S UNIVERSITY, 2-D TEST PROBLEM 3: THE KELVIN-HELMHOLTZ INSTABILITY URL: <http://ap.smu.ca/~dclarke/zeus3d/version3.5/2dtest03.html>, CONSULTADO EL 25/03/17
- [10] NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION, JUPITER'S VIOLENT STORMS, URL: <https://solarsystem.nasa.gov/galleries/jupiters-violent-storms>, CONSULTADO EL 25/03/17
- [11] H. RENARD; D. THÉVENIN, DYNAMICS OF FLAME/VORTEX INTERACTIONS, PROGRESS IN ENERGY AND COMBUSTION SCIENCE, VOLUMEN 26, PAGES 225-282, 2000
- [12] DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA III, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA, URL: [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Est%C3%A1tica_de_la_part%C3%ADcula_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Est%C3%A1tica_de_la_part%C3%ADcula_(GIE)), CONSULTADO EL 5/04/17

- [13] EDUCASOUND, MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO, URL: <http://educasound.com/movimiento-armonico-amortiguado/>, CONSULTADO EL 5/04/17
- [14] D.D. BRISKE; S.D. FUHLENDORF, VEGETATION DYNAMICS ON RANGELANDS: A CRITIQUE OF THE CURRENT PARADIGMS, 2003
- [15] S. CHANDRASEKHAR, HYDRODYNAMIC AND HYDROMAGNETIC STABILITY, DOVER PUBLICATIONS
- [16] HAKAN NILSON. CHALMERS, A LOOK INSIDE ICOFOAM (AND PISO-FOAM), URL: http://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD_2013/aLookInsideIcoFoam.pdf, CONSULTADO EL 12/04/17
- [17] CHRISTOPHER J. GREENSHIELDS, OPENFOAM USER GUIDE, URL: <http://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/OpenFOAMUserGuide-A4.pdf>, CONSULTADO EL 18/04/17
- [18] M. DIANAT; M. SKARYSZ; A. GARMORY, A COUPLED LEVEL SET AND VOLUME OF FLUID METHOD FOR AUTOMOTIVE EXTERIOR WATER MANAGEMENT APPLICATIONS, INTERNATIONAL JOURNAL OF MULTIPHASE FLOW, PÁGS 19-38, 2017
- [19] E. BERBEROVIĆ; S. JAKIRLIĆ; I. ROISMAN; C. TROPEA, DROP IMPACT ONTO A LIQUID LAYER OF FINITE THICKNESS: DYNAMICS OF THE CAVITY EVOLUTION, PHYSICAL REVIEW E, 4/2017
- [20] E. BUCKINGHAM, ON PHYSICALLY SIMILAR SYSTEMS: ILLUSTRATIONS OF THE USE OF DIMENSIONAL EQUATIONS, PHYSICAL REVIEW, VOLUMEN 4, NÚMERO 4, PÁGS 345-376, 1914
- [21] STÉPHANIE TERRADE, OVERVIEW OF HYDRODYNAMIC INSTABILITIES, URL: <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/CD0001/travaux/optmfn/hi/01pa/hyb72/index.htm>, CONSULTADO EL 20/05/17
- [22] SURFACE-TENSION VALUES, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Surface-tension_values, CONSULTADO EL 17/05/17
- [23] LUKA STRUBELJ; IZTOK TISELJ, NUMERICAL SIMULATION OF BASIC INTER-FACE INSTABILITIES WITH IMPROVED TWO-FLUID MODEL, INTERNACIONAL CONFERENCE: NUCLEAR ENERGY FOR NEW EUROPE 2005, 5-8 DE SEPTIEMBRE
- [24] LUKA STRUBELJ; IZTOK TISELJ, CFD SIMULATION OF KELVIN-HELMHOLTZ INSTABILITY, INTERNACIONAL CONFERENCE: NUCLEAR ENERGY FOR NEW EUROPE 2009, 14-17 DE SEPTIEMBRE